Esimerkkejä renkaista

Esimerkki. (LUKURENKAAT) Kokonaisluvut $\mathbb{Z}$, rationaaliluvut $\mathbb{Q}$, reaaliluvut $\mathbb{R}$ ja kompleksiluvut $\mathbb{C}$ ovat renkaita tavallisen yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen. Nämä renkaat ovat kommutatiivisia. Kaikkien näiden renkaiden ykkösalkio on kokonaisluku 1 ja nolla-alkio luku 0.

Myös kolmikko $(\mathbb{Z}[i],+,\cdot)$, missä

$$\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$$

ja operaatiot $+$ ja $\cdot$ ovat tavallinen yhteen- ja kertolasku, on rengas. Todistetaan ensin, että $(\mathbb{Z}[i],+)$ on ryhmä. $\mathbb{Z}[i]$ on selvästi suljettu operaation $+$ suhteen. Tavallisena lukujen yhteenlaskuna operaatio $+$ on assosiatiivinen ja kommutatiivinen joukossa $\mathbb{Z}[i]$. Kun vielä huomataan, että 0 on neutraalialkio ja alkion $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ vasta-alkio on $-a-bi$, niin saadaan, että $(\mathbb{Z}[i],+)$ on Abelin ryhmä. Renkaan $(\mathbb{Z}[i],+,\cdot)$ ykkösalkio on 1. On selvää, että operaatio $\cdot$ joukossa $\mathbb{Z}[i]$ on assosiatiivinen ja toteuttaa distributiivilait. Lisäksi operaatio $\cdot$ on kommutatiivinen.

Joukkoa $\mathbb{Z}[i]$ sanotaan *Gaussin kokonaisluvuiksi.*

Esimerkki. (MATRIISIRENKAAT) Reaalialkioisten neliömatriisien joukko $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muodostaa renkaan matriisien yhteenlaskun ja matriisitulon suhteen. Sivulla Esimerkkejä ryhmistä 2 todettiin, että $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+)$ on Abelin ryhmä. Joukko $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on suljettu matriisitulon suhteen, sillä aina reaalilukujen summa ja tulo on reaaliluku. Sivun Matriisitulon ominaisuuksia lauseiden nojalla matriisitulo on assosiatiivinen ja toteuttaa distributiivilait. Renkaan ykkösalkio on identiteettimatriisi I_n.

Muita vastaavia ryhmiä muodostavat neliömatriisit yli kokonaislukujen $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, yli rationaalilukujen $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ ja yli kompleksilukujen $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriisien yhteenlaskun ja matriisitulon suhteen. Tarkista, että nämä joukot ovat suljettuja kyseisten operaatioiden suhteen.

Mainitut matriisirenkaat ovat epäkommutatiivisia, kun $n > 1$.

Esimerkki. (FUNKTIORENKAAT) Funktiojoukko

$$C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva}\}$$

on rengas funktioiden pisteittäisen yhteen- ja kertolaskun suhteen:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \qquad (fg)(x) = f(x)g(x) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Käymällä läpi ryhmäpostulaatit on helppo todeta, että $(C[a,b],+)$ on Abelin ryhmä, neutraalialkiona on funktio $f_0(x) = 0$ kaikilla $x \in [a,b]$. Renkaan $C[a,b]$ ykkösalkio on funktio $f(x) = 1$ kaikilla $x \in [a,b]$. Rengaspostulaattien toteutuminen nähdään helposti.

Linkit:

Rengas

Matriisi

Yksinkertaisia matriiseja

Esimerkkejä ryhmistä 2

Matriisitulon ominaisuuksia