Renkaan yksikköryhmä

Yhden alkion joukko $R = \{a\}$ muodostaa triviaalisti renkaan, kun määritellään $a+a=a$ ja $a \cdot a = a$. Koska a on silloin ryhmän $(R,+)$ neutraalialkio eli nolla-alkio, sanotaan tätä rengasta *nollarenkaaksi*.

Oletetaan jatkossa, ettei R ole nollarengas.

Määritelmä. Renkaan $(R,+,\cdot)$ alkiota u sanotaan renkaan *yksiköksi (unit)*, jos alkiolla u on käänteisalkio renkaassa R, toisin sanoen, jos on olemassa sellainen $u^{-1} \in R$, että $u \cdot u^{-1} = u^{-1} \cdot u = 1_R$.

Renkaan kaikkien yksiköiden joukosta käytetään merkintää R^*.

Lause. Olkoon $(R,+,\cdot)$ rengas. Silloin $(R^*,\cdot)$ on ryhmä. Tätä ryhmää sanotaan renkaan *yksikköryhmäksi*.

Todistus. Joukko R^* on epätyhjä, sillä $1_R \in R^*$. Alkio 1_R on ryhmän $(R^*,\cdot)$ neutraalialkio. Jos $u, v \in R^*$, niin $u \cdot v \in R^*$, sillä alkion $u \cdot v$ käänteisalkio on $v^{-1}u^{-1}$.

Operaatio $\cdot$ on assosiatiivinen joukossa R, joten se on assosiatiivinen myös osajoukossa R^*. Jos $u \in R^*$, niin $u^{-1} \in R$, koska alkion u^{-1} käänteisalkio $(u^{-1})^{-1} = u \in \mathbb{R}$.

Täten $(R^*,\cdot)$ toteuttaa ryhmän postulaatit ja on siis ryhmä. $\square$

Lause. Olkoon $(R,+,\cdot)$ rengas (R ei ole nollarengas). Silloin renkaan ykkösalkio 1_R ja nolla-alkio 0_R ovat aina eri alkiot.

Todistus. Jos olisi $1_R = 0_R$, niin kaikilla renkaan R nollasta eroavilla alkioilla a olisi

$$a = a \cdot 1_R = a \cdot 0_R = 0_R,$$

mikä on ristiriita. $\square$

Linkit:
Ryhmä

Rengas