Renkaan aritmetiikkaa

Olkoon $(R,+,\cdot)$ rengas. Koska $(R,+)$ on ryhmä noudattaa yhteenlasku ryhmäteoriasta tuttuja sääntöjä. Esimerkiksi alkioiden $a,b \in R$ erotus määritellään kuten ryhmässä: $a-b=a+(-b)$.

Myös kertolaskun säännöt perustuvat ryhmäteoriaan. Huomaa, että alkion $a \in R$ negatiivinen potenssi on määritelty vain jos alkiolla a on käänteisalkio a^{-1}.

Soveltamalla renkaan distributiivilakia (R5) toistuvasti saadaan kaavat kaikille $a, a_1, \ldots, a_m, b, b_1, \ldots, b_n \in R$:

$$\begin{aligned} a(b_1+\cdots+b_n) &= ab_1+\cdots+ab_n, \\ (a_1+\cdots+a_m)b &= a_1b+\cdots+a_mb \end{aligned}$$

ja yleisesti

$$(a_1+\cdots+a_m)(b_1+\cdots+b_n) = a_1b_1+a_1b_2+\cdots+a_mb_n.$$

Seuraavassa lauseessa saadaan lisää tarvittavia laskulakeja renkaaseen.

Lause. Olkoot $(R,+,\cdot)$ rengas, 0_R sen nolla-alkio ja $a,b,c \in R$. Silloin

(i) $0_R \cdot a = a \cdot 0_R = 0_R$,

(ii) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$ ja $(-a)(-b) = ab$,

(iii) $a(b-c) = ab-ac$ ja $(a-b)c = ac-bc$.

Todistus. (i) Koska $0_R = 0_R + 0_R$, niin käyttämällä distributiivilakia saadaan: $0_R \cdot a = (0_R+0_R)\cdot a = 0_R \cdot a + 0_R \cdot a$. Vähentämällä saadun yhtälön molemmilta puolilta $0_R \cdot a$ päädytään yhtälöön $0_R = 0_R \cdot a$. Väite $a \cdot 0_R = 0_R$ voidaan todistaa samoin.

(ii) Koska distributiivilain ja edellisen kohdan nojalla on $ab + a(-b) = a(b+(-b)) = a \cdot 0_R = 0_R$, niin tulo $a(-b)$ on tulon ab vasta-alkio Abelin ryhmässä $(R,+)$. Vastaavasti nähdään, että myös $(-a)b$ on tulon ab vasta-alkio.

Edellisten yhtälöiden avulla saadaan $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab$.

(iii) Nyt $a(b-c) = a(b+(-c)) = ab + a(-c) = ab + (-(ac)) = ab - ac$. Toinen yhtälö voidaan todistaa samoin.
$\square$

Renkaan $(R,+,\cdot)$ alkiot toteuttavat ryhmäteoriasta tutut laskulait:

$$(m+n)a = ma+na, \quad (mn)a = m(na), \quad n(a+b) = na+nb \qquad \forall m,n \in \mathbb{Z}, a,b \in R.$$

Lisäksi kaikilla $a,b \in R$ ja $m,n \in \mathbb{Z}$ on voimassa

$$\begin{aligned} n(a\cdot b) &= (na)\cdot b = a\cdot(nb), \\ (na)\cdot(mb) &= (nm)(a\cdot b). \end{aligned}$$

Huomaa, että edellisissä tulo na ei välttämättä ole renkaan tulo-operaatio, kokonaisluku n ei välttämättä sisälly renkaaseen R. Kun n on positiivinen, merkintä na on lyhennysmerkintä n :n alkion a summalle $a+\cdots+a$. Ykkösalkiota käyttäen voidaan tulo na esittää renkaan operaationa, nimittäin $na = (n1_R)\cdot a = (1_R+\cdots+1_R)\cdot a$. Negatiivisilla n :n arvoilla tulo na on alkion $|n|a$ vasta-alkio.

Linkit:
Rengas

Renkaan yksikköryhmä