# Ihanne

Ryhmäteoriassa normaaleilla aliryhmillä on erityisasema. Rengasteoriassa normaaleja aliryhmiä vastaavat *ihanteet*.

**Määritelmä.** Olkoon $(R,+,\cdot)$ rengas. Joukkoa $I \subseteq R$ sanotaan renkaan $R$ *ihanteeksi* tai *ideaaliksi*, jos

(I1) $(I,+)$ on ryhmän $(R,+)$ aliryhmä ja

(I2) $ra \in I$ ja $ar \in I$ kaikilla $r \in R$ ja $a \in I$.

(Jos ehdosta (I2) jätetään pois ehto $ar \in I$, saadaan yleisempi *vasemman ihanteen* käsite. Vastaavasti *oikea ihanne* saadaan jättämällä ehdosta (I2) pois ehto $ra \in I$.)

Jokaisen renkaan $(R,+,\cdot)$ triviaalit ihanteet ovat rengas itse ja nollaihanne $\{0_R\}$.

Jos renkaan $(R,+,\cdot)$ ihanne $I$ muodostaa alirenkaan operaatioiden $+$ ja $\cdot$ suhteen, niin alirengaskriteerin nojalla $1_R \in I$. Tästä seuraa ehdon (I2) nojalla, että $r = r \cdot 1_R \in I$ kaikilla $r \in R$. Täten rengas itse on sen ainoa ihanne, joka on myös (ali)rengas.

Edellisen päättelyn nojalla saadaan seuraava tulos: *Jos $I$ on renkaan $R$ aito ihanne (siis $I \subset R$), niin $I \bigcap R^* = \emptyset$ ($R^*$ on renkaan yksiköiden joukko).* Nimittäin, jos renkaan yksikkö $u \in I$, niin ehdon (I2) nojalla $u \cdot u^{-1} = 1_R \in I$, ja silloin olisi $I = R$.

**Lause.** (Ihannekriteeri) Olkoon $(R,+,\cdot)$ rengas ja $I \subseteq R$. Joukko $I$ on renkaan $R$ ihanne jos ja vain jos seuraavat ehdot toteutuvat:

(a) $I$ on epätyhjä joukko,

(b) $a - b \in I$ kaikilla $a, b \in I$ ja

(c) $ra \in I$ ja $ar \in I$ kaikilla $r \in R$ ja $a \in I$.

*Todistus.* Ehdot (a) ja (b) ovat yhdessä ekvivalentit ehdon (I1) kanssa. Ehto (c) on sama kuin ehto (I2). □

**Lause.** Jos joukot $I$ ja $J$ ovat renkaan $(R,+,\cdot)$ ihanteita, niin samoin on niiden leikkaus $I \cap J$ ja summa

$$I + J = \{a + b \mid a \in I,\ b \in J\}.$$

Sama on voimassa useammankin kuin kahden ihanteen tapauksessa (leikkauksen suhteen jopa äärettömän monen ihanteen leikkaus on ihanne).

*Todistus.* Todistetaan summaa koskeva väite. Leikkausta koskeva väite voidaan todistaa samantapaisella päättelyllä. Koska $I$ ja $J$ ovat ihanteina epätyhjiä joukkoja, on niiden summakin epätyhjä.

Olkoot $a_1, a_2 \in I$, $b_1, b_2 \in J$ ja $c_i = a_i + b_i \in I + J$ $(i = 1, 2)$. Käyttäen hyväksi sivulla Renkaan aritmetiikkaa esiteltyjä laskulakeja ja ryhmän $(R,+)$ kommutatiivisuutta saadaan: $c_1 - c_2 = a_1 + b_1 - (a_2 + b_2) = a_1 + b_1 - a_2 - b_2 = a_1 - a_2 + b_1 - b_2 \in I + J$. Kaikilla $r \in R$ on $rc_1 = r(a_1 + b_1) = ra_1 + rb_1 \in I + J$. Väite seuraa ihannekriteeristä. □

---

**Linkit**:
Aliryhmä
Normaali aliryhmä
Alirengas
Renkaan aritmetiikkaa
Rengas