Ihanteen generointi ja pääihannerengas

Ryhmäteoriassa todettiin, että joukon G osajoukko generoi ryhmän $(G,*)$ aliryhmän. Ihanteille saadaan vastaava tulos. Olkoon $(R,+,\cdot)$ rengas ja $S \subseteq R$. Silloin S generoi renkaan R ihanteen $< S >$, missä

$$< S >= \bigcap_{\substack{S \subseteq I \\ I \text{ on renkaan } (R,+,\cdot) \text{ ihanne}}} I.$$

Sivun Ihanne viimeisen lauseen mukaan $< S >$ on ihanne. Tämä ihanne on renkaan $(R,+,\cdot)$ suppein sellainen ihanne, joka sisältää joukon S.

Jos S on äärellinen joukko $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, niin ihanteen $< S >$ sanotaan olevan *äärellisesti generoitu(va)*. Tällöin voidaan merkitä $< S >=< a_1, \ldots, a_n >$.

Yhden alkion a generoimaa ihannetta $< a >$ sanotaan *pääihanteeksi*.

Huomaa, että

$$< a_1, \ldots, a_n >=< b_1, \ldots, b_m >,$$

jos kumpikin ihanne sisältää toisen generaattorit. Nimittäin, jos $a_1, \ldots, a_n \in < b_1, \ldots, b_m >$, niin edellä todetun nojalla $< a_1, \ldots, a_n > \subseteq < b_1, \ldots, b_m >$. Vastaava tulos saadaan toisin päin.

Triviaalit ihanteet R ja $\{0_R\}$ ovat pääihanteita, koska $R =< 1_R >$ ja $\{0_R\} =< 0_R >$.

Määritelmä. Rengasta, jonka kaikki ihanteet ovat pääihanteita, sanotaan *pääihannerenkaaksi (principal ideal ring)*.

Lause. Jos $(R,+,\cdot)$ on kommutatiivinen rengas ja $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq R$ on epätyhjä joukko, niin

$$< a_1, \ldots, a_k >= \{r_1a_1 + \cdots + r_ka_k \mid r_i \in R,\ i = 1, \ldots, k\}.$$

Todistus. Merkitään $U = \{r_1a_1 + \cdots + r_ka_k \mid r_i \in R,\ i = 1, \ldots, k\}$. Selvästi U on epätyhjä joukko. Olkoot $r_1a_1 + \cdots + r_ka_k \in U$ ja $s_1a_1 + \cdots + s_ka_k \in U$. Renkaan R distributiivilaeista seuraa, että

$$r_1a_1 + \cdots + r_ka_k - (s_1a_1 + \cdots + s_ka_k) = (r_1 - s_1)a_1 + \cdots + (r_k - s_k)a_k \in U,$$

sillä $r_i - s_i \in R$ kaikilla luvun i arvoilla.

Olkoon $r \in R$. Renkaan R distributiivi- ja assosiatiivilaeista seuraa, että

$$r(r_1a_1 + \cdots + r_ka_k) = (rr_1)a_1 + \cdots + (rr_k)a_k \in U,$$

sillä $rr_i \in R$ kaikilla arvoilla i. Ihannekriteerin nojalla U on ihanne.

Kaikilla luvun i arvoilla $0_Ra_1 + \cdots + 0_Ra_{i-1} + 1_Ra_i + 0_Ra_{i+1} + \cdots + 0_ra_k \in U$, missä 0_R on renkaan R nolla-alkio ja 1_R on ykkösalkio. Täten $\{a_1, \ldots, a_k\} \in U$. Koska U on ihanne, $< a_1, \ldots, a_k > \subseteq U$.

Toisaalta jokainen joukko I, joka sisältyy leikkaukseen

$$< a_1, \ldots, a_k >= \bigcap_{\substack{\{a_1,\ldots,a_k\} \subseteq I \\ I \text{ on renkaan } (R,+,\cdot) \text{ ihanne}}} I$$

sisältää kaikki joukon U alkiot. Täten $U \subseteq < a_1, \ldots, a_k >$ ja siis $< a_1, \ldots, a_k >= U$. $\square$

Linkit:
Ryhmän generointi

Ihanne