Jäännösluokkarengas

Ryhmälle $(G,*)$ määriteltiin normaalin aliryhmän $(N,*)$ avulla tekijäryhmä G/N. Vastaavasti määritellään nyt renkaalle $(R,+,\cdot)$ jäännösluokkarengas R/I renkaan ihanteen I avulla.

Olkoon I renkaan $(R,+,\cdot)$ ihanne. Silloin ryhmä $(I,+)$ on ryhmän $(R,+)$ normaali aliryhmä – normaalisuus seuraa ryhmän $(R,+)$ kommutatiivisuudesta. Täten voidaan muodostaa tekijäryhmä

$$R/I = \{a+I \mid a \in R\} = \{a+I \mid a \in D\},$$

missä D on jokin *jäännösluokkien* $a+I$ edustajisto. Tekijäryhmän operaatio $+$ määritellään luonnollisesti kaikille $a,b \in D$:

$$(a+I)+(b+I) = (a+b)+I.$$

Lause. Jos I on renkaan $(R,+,\cdot)$ ihanne, niin $(R/I,+,\cdot)$ on rengas seuraavasti määriteltyjen operaatioiden $+$ ja $\cdot$ (jätetään merkitsemättä) suhteen:

$$(a+I)+(b+I) = (a+b)+I, \qquad (a+I)(b+I) = ab+I,$$

missä $a,b \in R$.

Todistus. Todistetaan väite tarkistamalla renkaan postulaatit (R1)-(R5). Kuten edellä todettiin on $(R/I,+)$ ryhmä. Koska $(R,+)$ on Abelin ryhmä on myös $(R/I,+)$ kommutatiivinen.

Osoitetaan toiseksi, että jäännösluokkien kertolasku on hyvinmääritelty. Olkoon $a+I = a'+I$ ja $b+I = b'+I$, silloin $a = a'+i_1$ ja $b = b'+i_2$, joillekin $i_1, i_2 \in I$. Nyt

$$ab = (a'+i_1)(b'+i_2) = a'b' + a'i_2 + i_1b' + i_1i_2.$$

Koska I on renkaan R ihanne se sisältää tulot $a'i_2$, i_1b' ja i_1i_2 sekä näiden summan. Täten $ab = a'b'+i$, missä $i \in I$. Tämä tarkoittaa samaa kuin $ab \in a'b'+I$ eli $ab+I = a'b'+I$.

Olkoon $a,b,c \in R$. Renkaan alkioiden assosiatiivisuuden nojalla saadaan postulaatin (R3) toteutuvuus:

$$\begin{aligned}(a+I)((b+I)(c+I)) &= (a+I)(bc+I) = a(bc)+I \\ &= (ab)c+I = (ab+I)(c+I) = ((a+I)(b+I))(c+I).\end{aligned}$$

Samoin voidaan todistaa distributiivilait (R5).

Renkaan $(R/I,+,\cdot)$ ykkäsalkio on 1_R+I, missä 1_R on renkaan $(R,+,\cdot)$ ykkösalkio. Nimittäin kaikilla $a \in R$ on

$$(a+I)(1_R+I) = a\cdot 1_R + I = a+I = 1_R\cdot a + I = (1_R+I)(a+I).$$

□

Määritelmä. Rengasta $(R/I,+,\cdot)$ sanotaan renkaan $(R,+,\cdot)$ *jäännösluokkarenkaaksi* ihanteen I suhteen (voidaan sanoa myös *tekijärenkaaksi* (englanniksi residue class ring, factor ring)).

Linkit:
Tekijäryhmä

Rengas

Ihanne