Esimerkkejä jäännösluokkarenkaista

Esimerkki. Renkaan $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ihanteita ovat joukot $m\mathbb{Z}$ kaikilla kokonaisluvuilla m, joilla $m>1$. Renkaan $\mathbb{Z}$ jäännösluokkarengas ihanteen $m\mathbb{Z}$ suhteen on

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{a+m\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{\overline{0},\overline{1},\ldots,\overline{m-1}\},$$

missä operaatiot kaikilla $a,b \in \mathbb{Z}$ ovat

$$\overline{a}+\overline{b} = \overline{a+b}, \qquad \overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{ab}.$$

Kyseessä on siis tuttu rengas $(\mathbb{Z}_m,+,\cdot)$ eli jäännösluokkarengas modulo m.

Jos $m=1$ saadaan nollarengas $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{0\}$. Yleisestikin pitää paikkansa $R/R = \{0_R\}$.

Esimerkki. Palautetaan mieleen joukko

$$\mathbb{Z}[\sqrt{10}] = \{a+b\sqrt{10} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}.$$

Renkaan $(\mathbb{C},+,\cdot)$ alirenkaana $(\mathbb{Z}[\sqrt{10}],+,\cdot)$ on kommutatiivinen rengas (katso Esimerkkejä alirenkaista).

Koska $(\mathbb{Z}[\sqrt{10}],+,\cdot)$ on kommutatiivinen rengas, joukon $\{5,\sqrt{10}\}$ generoima ihanne on sivun Ihanteen generointi ja pääihannerengas lauseen mukaan

$$\begin{aligned}
<5,\sqrt{10}> &= \{r_1\cdot 5 + r_2\cdot\sqrt{10} \mid r_1,r_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{10}]\} \\
&= \{(a_1+b_1\sqrt{10})\cdot 5 + (a_2+b_2\sqrt{10})\sqrt{10} \mid a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{(5a_1+10b_2)+(a_2+5b_1)\sqrt{10} \mid a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{5a+b\sqrt{10} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Ihanteen $I = <5,\sqrt{10}>$ muodostaman jäännösluokkarenkaan

$$\mathbb{Z}[\sqrt{10}]/I$$

mielivaltainen alkio on

$$(a+b\sqrt{10})+I = a+I, \qquad a,b \in \mathbb{Z}$$

sillä $b\sqrt{10} \in I$.

Jokainen kokonaisluku a voidaan kirjoittaa jakoalgoritmin mukaan muodossa $a=5q+r$, missä $q,r \in \mathbb{Z}$ ja $0 \le r \le 4$. Täten

$$a+I = 5q+r+I = r+I,$$

sillä $5q \in I$.

Siis $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]/<5,\sqrt{10}> = \{r+I \mid r=0,1,2,3,4\}$. Helposti nähdään, että joukon alkiot ovat eri alkioita. Esimerkiksi vastaoletuksesta $0+I = 1+I$ seuraa, että $0=1+i$, jollekin $i \in I$. Pitäisi siis olla $i=-1$, mutta tämä on ristiriita, sillä $-1 \notin I$.

Linkit:
Jäännösluokkarengas
Esimerkkejä ihanteista
Esimerkkejä alirenkaista
Ihanteen generointi ja pääihannerengas
Jakoalgoritmi