

Renkaiden homomorfialause

Lause. [Renkaiden homomorfialause] Jos $f : (R, +, \cdot) \rightarrow (R', +', \cdot')$ on rengashomomorfismi, niin

$$(R/\ker(f), +, \cdot) \simeq (\text{Im}(f), +', \cdot').$$

Tarkemmin: f indusoi rengasisomorfismin

$$F : (R/\ker(f), +, \cdot) \rightarrow (\text{Im}(f), +', \cdot'),$$

missä $F(a + \ker(f)) = f(a)$ kaikilla $a \in R$.

Todistus. Ryhmien homomorfialauseen nojalla kuvaus $F : (R/\ker(f), +) \rightarrow (\text{Im}(f), +')$ on ryhmäisomorfismi. On siis todistettava, että kuvaus F toteuttaa homomorfiaehdot RH2 ja RH3.

Kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ on

$$F((a + \ker(f)) \cdot (b + \ker(f))) = F(a \cdot b + \ker(f)) = f(ab) = f(a) \cdot' f(b) = F(a + \ker(f)) \cdot' F(b + \ker(f)),$$

joten RH2 toteutuu. Lisäksi $F(1_R + \ker(f)) = f(1_R) = 1_{R'} = 1_{\text{Im}(f)}$, joten RH3 toteutuu. \square

Kuten ryhmillä, saadaan renkailla homomorfialauseen nojalla alla oleva kommutoiva diagrammi. Olkoon I renkaan $(R, +, \cdot)$ ihanne, silloin kuvausta π

$$\pi : (R, +, \cdot) \rightarrow (R/I, +, \cdot), \quad \pi(a) = a + I \quad \forall a \in R$$

sanotaan (*kanoniseksi*) *projektioksi*. Kuvaus π on rengashomomorfismi, sillä kaikilla $a, b \in R$ on

$$\pi(a + b) = (a + b) + I = (a + I) + (b + I) = \pi(a) + \pi(b)$$

ja

$$\pi(a \cdot b) = a \cdot b + I = (a + I) \cdot (b + I) = \pi(a) \cdot \pi(b).$$

Lisäksi $\pi(1_R) = 1_R + I = 1_{R/I}$. Kuvaus π on triviaalisti surjektiivinen.

Olkoon $f : (R, +, \cdot) \rightarrow (R', +', \cdot')$ rengashomomorfismi. Valitaan nyt $I = \ker(f)$. Homomorfialauseen nojalla $f(a) = F(a + \ker(f)) = F(a + I) = F(\pi(a)) = (F \circ \pi)(a)$ kaikilla $a \in R$, missä F on kuvaus $(R/\ker(f), +, \cdot) \rightarrow (\text{Im}(f), +', \cdot')$. Siis $f = F \circ \pi$. Renkaan $(R, +, \cdot)$ homomorfiset kuvat vastaavat siis bijektiivisesti renkaan R jäännösluokkarenkaita.

$$\begin{array}{ccc}
 (R, +, \cdot) & \xrightarrow{f} & (\text{Im}(f), +', \cdot') \\
 & \searrow \pi & \nearrow F \\
 & (R/\ker(f), +, \cdot) &
 \end{array}$$

~

Linkit:

Ryhmien homomorfialause

Renkaiden homomorfa

Rengashomomorfismin ydin ja kuva