Kokonaisalue

Määritelmä. Renkaan $(R,+,\cdot)$ alkiota a sanotaan *nollanjakajaksi (zero divisor)*, jos $a \neq 0_R$ ja on olemassa sellainen $b \in R$, $b \neq 0_R$, että

$$ab = 0_R \qquad \text{tai} \qquad ba = 0_R.$$

(Tällöin myös alkio b on nollanjakaja.)

Määritelmä. Rengasta $(R,+,\cdot)$ sanotaan *kokonaisalueeksi (integral domain)*, jos

D1. $(R,+,\cdot)$ on kommutatiivinen ja

D2. renkaassa R ei ole nollanjakajia.

Kokonaisalueessa $(D,+,\cdot)$ on voimassa *supistamislaki*: Olkoon $a \in D$ ja $a \neq 0_D$. Silloin kaikilla $b,c \in D$,

$$\text{jos} \quad ab = ac, \qquad \text{niin} \quad b = c.$$

Nimittäin vasemmanpuoleinen yhtälö on ekvivalentti sen kanssa, että $a(b-c) = 0_D$. Koska a ei ole nollanjakaja on oltava $b-c = 0_D$.

Määritelmä. Kokonaisalueen $(D,+,\cdot)$ *karakteristika (characteristic)*

$$\mathrm{char}(D) = \begin{cases} \text{pienin sellainen positiivinen kokonaisluku } n, \text{ että } n \cdot 1_D = 0_D, \\ 0, \text{ jos tällaista lukua } n \text{ ei ole olemasa.} \end{cases}$$

Toisin sanoen $\mathrm{char}(D)$ on kokonaisalueen $(D,+,\cdot)$ ykkösalkion 1_D kertaluku ryhmässä $(D,+)$, paitsi jos kertaluku on ääretön, jolloin $\mathrm{char}(D) = 0$.

Kokonaisalueen $(D,+,\cdot)$ kaikilla nollasta eroavilla alkioilla a on sama kertaluku ryhmässä $(D,+)$. Nimittäin yhtälö $n \cdot a = 0_D$ voidaan kirjoittaa muodossa $(n \cdot 1_D) \cdot a = 0_D$ (katso sivu Renkaan aritmetiikkaa). Koska kokonaisalueessa D ei ole nollanjakajia, niin saatu yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $n \cdot 1_D = 0_D$ kanssa.

Lause. Kokonaisalueen $(D,+,\cdot)$ karakteristika $\mathrm{char}(D)$ on joko 0 tai alkuluku.

Todistus. Oletetaan, että $\mathrm{char}(D) = n \neq 0$. Kirjoitetaan luku n kahden luvun n_1 ja n_2 tulona $n = n_1 n_2$, missä $0 < n_1 \leq n$ ja $0 < n_2 \leq n$. Silloin $0_D = n \cdot 1_D = (n_1 \cdot n_2) \cdot 1_D = (n_1 \cdot 1_D)(n_2 \cdot 1_D)$. Koska kokonaisalueessa D ei ole nollanjakajia, on ainakin toinen tulon tekijöistä 0_D. Voidaan olettaa, että $n_1 \cdot 1_D = 0_D$. Määritelmän mukaan $n = \mathrm{char}(D)$ on pienin luku, jolle $n \cdot 1_D = 0_D$. Täten $n_1 = n$. Luvun n ainoa tekijöihinjako on siis $n = n \cdot 1$, joten n on alkuluku. $\square$

Linkit:
Renkaan aritmetiikkaa

Sykliset ryhmät