

Kunta

Seuraavaksi esitetään *kunnan* määritelmä. Kunnan mallina on rationaalilukujen joukko, jossa on määritelty neljä peruslaskutoimitusta.

Määritelmä. Kolmikkoa $(K, +, \cdot)$ sanotaan *kunnaksi (field)*, jos

K1. $(K, +, \cdot)$ on kommutatiivinen rengas (ei nollarengas) ja

K2. jokaisella joukon K nolla-alkiosta 0_K eroavalla alkiolla on käänteisalkio joukossa K , toisin sanoen renkaan K yksikköryhmä $K^* = K \setminus \{0_K\}$.

Kolmikko $(K, +, \cdot)$ on siis määritelmän mukaan kunta jos ja vain jos se täyttää ehdot:

K1'. $(K, +)$ on Abelin ryhmä (kunnan *additiivinen ryhmä*),

K2'. $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ on Abelin ryhmä (kunnan *multiplikaatiivinen ryhmä*),

K3'. $a(b+c) = ab+ac$ ja $(a+b)c = ac+bc$ kaikilla $a, b, c \in K$.

Jos ei vaadita kertolaskun kommutatiivisuutta, saadaan niin sanottu *vinokunta (skew field)* eli *jakorengas (division ring)*.

Lause.

- (i) Jokainen kunta on kokonaisalue.
- (ii) Jokainen äärellinen kokonaisalue on kunta.

Todistus. (i) Olkoon $(K, +, \cdot)$ kunta. Kunnan määritelmän nojalla $(K, +, \cdot)$ on kommutatiivinen rengas, joten kokonaisalueen ehto D1. toteutuu. Osoitetaan vielä, ettei kunnassa ole nollanjakajia. Oletetaan, että $ab = 0_K$, joillakin $a, b \in K$, missä $a \neq 0_K$. Alkiolla a on käänteisalkio a^{-1} kunnassa K , täten $b = a^{-1} \cdot 0_K = 0_K$, mikä todistaa väitteen.

(ii) Olkoon $(D, +, \cdot)$ äärellinen kokonaisalue. Nyt pitää osoittaa, että jokaisella kokonaisalueen D nolla-alkiosta eroavalla alkiolla on käänteisalkio joukossa D . Olkoon $a \in D \setminus \{0_D\}$. Muodostetaan joukon D osajoukko $D_0 = \{ax \mid x \in D\}$. Soveltamalla supistamislakia kokonaisalueessa D nähdään, että $ax_1 \neq ax_2$ aina, kun $x_1 \neq x_2$. Koska D on äärellinen, tästä seuraa, että joukossa D_0 on yhtä monta alkiota kuin kokonaisalueessa D , siis $D_0 = D$. Silloin erityisesti kokonaisalueen D ykkösalkio 1_D on joukossa D_0 , toisin sanoen on olemassa sellainen $u \in D$, että $au = 1_D$. Koska D on kommutatiivinen tämä tarkoittaa, että $u = a^{-1}$. \square

Linkit:

Rengas

Ryhmä

Kokonaisalue

Huomioita kunnasta