Huomioita kunnasta

Koska kunta on rengas, on siinä määritelty yhteen-, vähennys- ja kertolasku. Jos $(K,+,\cdot)$ on kunta ja $a,b \in K$, niin vähennyslasku on $a-b=a+(-b)$. Jakolasku määritellään tavalliseen tapaan, kun $b \neq 0_K$:

$$\frac{a}{b}=ab^{-1}, \qquad \text{siis erityisesti} \qquad \frac{1}{b}=b^{-1}.$$

Kaikille $a,b,c,d \in K$, kun $b \neq 0_K$ ja $d \neq 0_K$, saadaan soveltamalla renkaan laskulakeja, että

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Osamäärillä $\frac{a}{b}$ lasketaan siis samoin kuin murtoluvuilla. Huomaa myös, että $\frac{a}{1_K}=a$.

Jos ei ole sekaannuksen vaaraa, kunnassa $(K,+,\cdot)$ merkitään usein

$$1_K+1_K=2, \qquad 1_K+1_K+1_K=3,\ldots, \text{ yleisesti } n\cdot 1_K=n \quad \forall\, n\in\mathbb{Z}.$$

Koska kunta on kokonaisalue, sille on määritelty karakteristika $\mathrm{char}(K)$, ja tämä on joko 0 tai alkuluku sivun Kokonaisalue lauseen mukaan. *Jos* $\mathrm{char}(K)=0$, *niin* $(K,+,\cdot)$ *on ääretön kunta. Äärellisen kunnan karakteristika on alkuluku.*

Jos $\mathrm{char}(K)=p$ on alkuluku, niin edellisessä yhtälössä $n\cdot 1_K=n$ on $n=0$ jos ja vain jos $p \mid n$.

Koska kunta on rengas, voidaan puhua sen ihanteista. Seuraava lause käsittelee tämän asian tyhjentävästi.

Lause. Kunnan $(K,+,\cdot)$ ainoat ihanteet ovat K ja $\{0_K\}$.

Todistus. Kuten sivulla Ihanne todetaan ovat K ja $\{0_K\}$ kunnan K ihanteita. Olkoon I kunnan K ihanne ja $I \neq \{0_K\}$. Koska ihanteen alkiot ovat kunnan alkioita, niin kaikilla $a \in I$ on olemassa käänteisalkio, joten ne ovat yksiköitä. Sivun Ihanne huomion mukaan tästä seuraa, että $I=K$. □

Olkoot $(K,+,\cdot)$ ja $(K',+',\cdot')$ kuntia. Rengashomomorfismia $f:(K,+,\cdot)\to(K',+',\cdot')$ sanotaan myös *kuntahomomorfismiksi*, vastaavaa rengasisomorfismia sanotaan *kuntaisomorfismiksi*.

Lause. Jokainen kuntahomomorfismi $f:(K,+,\cdot)\to(K',+',\cdot')$ on injektio ja siis indusoi kuntaisomorfismin $F:(K,+,\cdot)\to(\mathrm{Im}\,(f),+',\cdot')$.

Todistus. Sivun Rengashomomorfismin ydin ja kuva lauseen mukaan rengashomomorfismin ja siis tässä tapauksessa kuntahomomorfismin ydin on ihanne. Edellisen lauseen mukaan siis ydin on joko kunta itse tai nollaihanne. Jos ydin on K, niin silloin kaikilla $a\in K$ on $f(a)=0_K$. Tämä on kuitenkin mahdotonta rengashomomorfismin postulaatin RH3 nojalla. Siis kuntahomomorfismin ydin on $\{0_K\}$ ja täten sivun Rengashomomorfismin ydin ja kuva huomion mukaan kuntahomomorfismi on injektio.

Koska $f:(K,+,\cdot)\to(K',+',\cdot')$ antaa surjektion $f:(K,+,\cdot)\to(\mathrm{Im}\,(f),+',\cdot')$, saadaan lauseen loppuosan väite. □

Edellisen lauseen mukaan kunnan $(K,+,\cdot)$ kaikki homomorfiset kuvat ovat isomorfisia tämän kunnan kanssa.

Linkit:

Kunta

Kokonaisalue

Ihanne

Renkaan yksikköryhmä

Rengashomomorfismin ydin ja kuva

Renkaiden homomorfialause