Alikunta

Määritelmä. Olkoon $(K,+,\cdot)$ kunta ja $F \subseteq K$. Kolmikko $(F,+,\cdot)$ on kunnan K *alikunta*, jos $(F,+,\cdot)$ on kunta.

Jos $(F,+,\cdot)$ on kunnan $(K,+,\cdot)$ alikunta, niin $(F,+)$ on ryhmän $(K,+)$ aliryhmä ja $(F\setminus\{0_F\},\cdot)$ on ryhmän $(K\setminus\{0_R\},\cdot)$ aliryhmä. Tästä seuraa, että kuntien K ja F nolla-alkiot ja ykkösalkiot ovat samat.

Lause. (Alikuntakriteeri) Olkoon $(K,+,\cdot)$ kunta ja $F \subseteq K$. Kolmikko $(F,+,\cdot)$ on kunnan K alikunta jos ja vain jos seuraavat ehdot toteutuvat:

AK1. Joukossa F on vähintään kaksi alkiota,

AK2. $a-b \in F$ kaikilla $a,b \in F$,

AK3. $\frac{a}{b} \in F$ kaikilla $a,b \in F$, $b \neq 0_K$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $(F,+,\cdot)$ on kunnan $(K,+,\cdot)$ alikunta. Kuten ennen lausetta todettiin on $(F,+)$ on ryhmän $(K,+)$ aliryhmä. Täten $0_K \in F$ ja aliryhmäkriteerin perusteella kaikilla $a,b \in F$ on $a-b \in F$. Vastaavasti $(F\setminus\{0_F\},\cdot)$ on ryhmän $(K\setminus\{0_R\},\cdot)$ aliryhmä, joten $1_K \in F$ ja $ab^{-1} = \frac{a}{b} \in F$.

Oletetaan kääntäen, että ehdot AK1-AK3 ovat voimassa. Ehtojen AK1 ja AK2 nojalla $(F,+)$ on ryhmän $(K,+)$ aliryhmä. Vastaavasti ehtojen AK1 ja AK3 nojalla $(F\setminus\{0_F\},\cdot)$ on ryhmän $(K\setminus\{0_K\},\cdot)$ aliryhmä. Koska lisäksi joukon F alkiot kunnan K alkioina toteuttavat distributiivilait, pitää väite paikkansa sivun Kunta toteamuksen perusteella. □

Lause. Olkoon $(K,+,\cdot)$ kunta ja I jokin indeksijoukko. Jos $(K_i,+,\cdot)$ on kunnan K alikunta kaikilla $i \in I$, niin

$$\left(\bigcap_{i\in I} K_i,+,\cdot\right)$$

on kunnan K alikunta.

Todistus. Kaikkiin kunnan K alikuntiin sisältyvät alkiot 1_K ja 0_K, täten ne sisältyvät alikuntien leikkaukseen. Jos $a,b \in \bigcap_{i\in I} K_i$, niin $a,b \in K_i$ kaikilla $i \in I$. Täten $a-b \in K_i$ ja $\frac{1}{b} \in K_i$ kaikilla $i \in I$. Siis $a-b \in \bigcap_{i\in I} K_i$ ja $\frac{a}{b} \in \bigcap_{i\in I} K_i$. Väite seuraa alikuntakriteeristä. □

Linkit:
Kunta

Aliryhmä