Esimerkkejä alikunnista

Esimerkki. Olkoon n ($n \neq 0,1$) neliövapaa kokonaisluku (toisin sanoen luvulla n ei ole tekijänä mitään kokonaisluvun neliötä m^2, missä $m > 1$). Osoitetaan, että joukko

$$\mathbb{Q}(\sqrt{n}) = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

muodostaa kunnan $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ alikunnan. Jos $n > 0$, on tämä alikunta myös kunnan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ alikunta.

Koska $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{n})$, toteutuu alikuntakriteerin ehto AK1.

Oletetaan, että $a + b\sqrt{n}$, $a' + b'\sqrt{n} \in \mathbb{Q}(\sqrt{n})$. Silloin

$$(a + b\sqrt{n}) - (a' + b'\sqrt{n}) = a - a' + (b - b')\sqrt{n} \in \mathbb{Q}(\sqrt{n}),$$

koska $a - a' \in \mathbb{Q}$ ja $b - b' \in \mathbb{Q}$. Täten ehto AK2 toteutuu.

Oletetaan lisäksi, että $a' + b'\sqrt{n} \neq 0$. Nyt

$$\frac{a + b\sqrt{n}}{a' + b'\sqrt{n}} = \frac{(a + b\sqrt{n})(a' - b'\sqrt{n})}{(a')^2 - (b'\sqrt{n})^2} = \frac{1}{(a')^2 - (b')^2 n}((aa' - bb'n) + (a'b - ab')\sqrt{n}).$$

Saatu tulos kuuluu kuntaan $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$, mikäli $(a')^2 - (b')^2 n \neq 0$. Pitää siis osoittaa, että $a' - b'\sqrt{n} \neq 0$. Jos $a' - b'\sqrt{n} = 0$, niin $a' = b'\sqrt{n}$. Jos $b' = 0$, niin myös $a' = 0$, mistä seuraisi, että $a' + b'\sqrt{n} = 0$, mikä on ristiriita. Täten $b' \neq 0$ (samoin myös $a' \neq 0$). Nyt $n = \frac{(a')^2}{(b')^2}$. Koska $n \in \mathbb{Z}$ $(n \neq 0, 1)$, niin myös $(\frac{a'}{b'})^2 \in \mathbb{Z}$ ja siis $\frac{a'}{b'} \in \mathbb{Z}$. Tästä seuraa, että n on neliö, mikä on ristiriita. Siis $a' - b'\sqrt{n} \neq 0$ ja näin ollen ehto AK3 toteutuu.

Esimerkki. Olkoon $(K, +, \cdot)$ kunta ja $\mathrm{char}(K) = 2$. Näytetään, että joukko $\{0_K, 1_K\}$ muodostaa kunnan K alikunnan. Koska joukossa $\{0_K, 1_K\}$ on kaksi alkiota ehto AK1 toteutuu.

Koska $\mathrm{char}(K) = 2$, on $1_K + 1_K = 0_K$ ja tästä seuraa, että $-1_K = 0_K - 1_K = 1_K$. Vastaavasti voidaan laskea muut erotukset ja nähdään, että ehto AK2 toteutuu. Ehto AK3 toteutuu, koska $\frac{a}{1_K} = a$ molemmilla $a \in \{0_K, 1_K\}$. Väite seuraa alikuntakriteeristä.

Esimerkki. Olkoon $(K, +, \cdot)$ kunta ja kuvaus $f : (K, +, \cdot) \to (K, +, \cdot)$ homomorfismi kunnalta itselleen. Merkitään

$$F = \{a \in K \mid f(a) = a\}.$$

Näytetään, että $(F, +, \cdot)$ on kunnan $(K, +, \cdot)$ alikunta. Kuntaa $(F, +, \cdot)$ sanotaan homomorfismin f *kiintokunnaksi.*

Koska kuntahomomorfismi (katso sivu Renkaiden homomorfia) kuvaa aina $f(1_K) = 1_K$ ja $f(0_K) = 0_K$, niin $\{0_K, 1_K\} \subseteq F$. Täten alikuntakriteerin ehto AK1 toteutuu. Oletetaan, että $a, b \in F$. Silloin joukon F ja homomorfian määritelmän perusteella (katso sivu Renkaiden homomorfia)

$$f(a - b) = f(a + (-b)) = f(a) + f(-b) = f(a) - f(b) = a - b.$$

Täten $a - b \in F$. Jos lisäksi $b \neq 0_K$, niin

$$f(\frac{a}{b}) = f(ab^{-1}) = f(a) \cdot f(b^{-1}) = f(a) \cdot f(b)^{-1} = ab^{-1} = \frac{a}{b},$$

ja siis $\frac{a}{b} \in F$. Ehdot AK2 ja AK3 toteutuvat. Väite seuraa alikuntakriteeristä.

Linkit:
Alikunta
Renkaiden homomorfia