Kokonaisalueen osamääräkunta

Todistetaan nyt, että sivulla Kokonaisalueen osamääräkunnan konstruktio kostruoitu systeemi todella on kunta. Yhteen- ja kertolasku määritellään kuten kyseisellä sivulla.

Lause. Kolmikko $(Q(D),+,\cdot)$ on kunta. Lisäksi joukon $Q(D)$ osajoukko

$$D' = \{\frac{a}{1_D} \mid a \in D\}$$

muodostaa kunnan $(Q(D),+,\cdot)$ alirenkaan. Alirengas $(D',+,\cdot)$ on kokonaisalue ja isomorfinen kokonaisalueen $(D,+,\cdot)$ kanssa.

Todistus. Kolmikko $(Q(D),+,\cdot)$ on kommutatiivinen rengas, jonka nolla-alkio on $\frac{0_D}{1_D}$ ja ykkösalkio $\frac{1_D}{1_D}$. Alkion $\frac{a}{b} \in Q(D)$ vasta-alkio on $\frac{-a}{b}$. Rengaspostulaattien läpikäyminen jätetään harjoitukseksi.

Olkoon $\frac{a}{b} \in Q(D)$. Jos $\frac{a}{b} \neq \frac{0_D}{1_D}$, niin $a1_D \neq b0_D$ eli $a \neq 0_D$. Täten $\frac{b}{a} \in Q(D)$ ja $\frac{b}{a}$ on alkion $\frac{a}{b}$ käänteisalkio, sillä $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = \frac{1_D}{1_D}$. Näin ollen rengas $(Q(D),+,\cdot)$ on kunta.

Muodostetaan kuvaus

$$j : (D,+,\cdot) \to (Q(D),+,\cdot), \qquad j(a) = \frac{a}{1_D} \ \forall a \in D.$$

Kuvaus j on rengashomomorfismi kuten helposti nähdään tarkistamalla ehdot RH1-RH3. Lisäksi kuvaus j on injektio, sillä jos $j(a) = j(b)$ eli $\frac{a}{1_D} = \frac{b}{1_D}$, niin $a1_D = b1_D$ eli $a = b$. Renkaiden homomorfialauseen mukaan saadaan

$$(D,+,\cdot) \simeq (\mathrm{Im}\,(j),+,\cdot), \qquad \text{missä} \qquad \mathrm{Im}\,(j) = \{\frac{a}{1_D} \mid a \in D\} = D'.$$

Sivun Rengashomomorfismin ydin ja kuva huomion perusteella $(D',+,\cdot)$ on kunnan $(Q(D),+,\cdot)$ alirengas. □

Määritelmä. Kuntaa $(Q(D),+,\cdot)$ sanotaan kokonaisalueen $(D,+,\cdot)$ *osamääräkunnaksi* tai *jakokunnaksi (quotient field, field of fractions)*.

Jos konstruoidaan osamääräkunta $(Q(D),+,\cdot)$ kokonaisalueelle $(D,+,\cdot)$, joka on jonkin kunnan $(K,+,\cdot)$ alirengas, niin $Q(D)$ on isomorfinen sivun Huomioita alikunnasta lauseessa määritellyn kunnan

$$K_D = \{\frac{a}{b} \mid a,b \in D,\ b \neq 0_D\}$$

kanssa. On luonnollista samaistaa $Q(D)$ ja K_D, ja nimittää myös kuntaa K_D kokonaisalueen D osamääräkunnaksi. Edellisessä lauseessa todistettiin, että D on aina kunnan $Q(D)$ alirengas, joten osamääräkunta voidaan aina ajatella muodossa K_D. Nähdään myös, että kokonaisalueen D osamääräkunta $(K_D,+,\cdot)$ on suppein kunta, jonka alirengas $(D,+,\cdot)$ on. Jos nimittäin $(K,+,\cdot)$ on jokin kunta ja $(D,+,\cdot)$ se alirengas, niin $D \subseteq K_D \subseteq K$.

Voidaan todistaa, että kokonaisalueen osamääräkunnalla on seuraava *universaalisuusominaisuus*: Jos kokonaisalue A on isomorfinen kokonaisalueen B kanssa, niin kokonaisalueeen A osamääräkunta K_A on isomorfinen kokonaisalueen B osamääräkunnan K_B kanssa.

Linkit:

Kokonaisalueen osamääräkunnan konstruktio

Renkaiden homomorfia

Renkaiden homomorfialause

Rengashomomorfismin ydin ja kuva

Huomioita alikunnasta