Polynomirengas

Reaalikertoimiset polynomit $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, missä $a_i \in \mathbb{R}$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, ovat tuttuja monesta yhteydestä. Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas. Yleistetään polynomin käsitettä korvaamalla polynomin kertoimet $a_0, \ldots, a_n$ renkaan $(R, +, \cdot)$ alkioilla. Tällaisten polynomien yhteen- ja kertolasku voidaan suorittaa aivan kuten reaalisessakin tapauksessa, nyt kertoimiin sovelletaan renkaan $(R, +, \cdot)$ laskutoimituksia.

Kaikkien yhden muuttujan x polynomien, joiden kertoimet kuuluvat renkaaseen $(R, +, \cdot)$, joukosta käytetään merkintää $R[x]$. Siis

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid n \geq 0,\ a_k \in R,\ k = 1, \ldots, n\}.$$

Joukon alkioita sanotaan *polynomeiksi yli renkaan R* (tai *renkaan R suhteen*).

Kaksi joukon $R[x]$ polynomia

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \\ g(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \end{aligned}$$

ovat yhtäsuuret jos ja vain jos $n = m$ ja $a_k = b_k$ kaikilla $k = 1, \ldots, n$.

Olkoon $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \in R[x]$ ja $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i \in R[x]$. Voidaan olettaa, että $m \geq n$. Määritellään polynomien yli renkaan R yhteen- ja kertolasku seuraavasti:

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_ix^i,$$

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i+j=k} a_ib_jx^k.$$

(Ajatellaan tässä mahdolliset puuttuvat termit korvatuiksi nolla-alkiolla 0_R.)

Lause. Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas. Silloin $R[x]$ on rengas yllä määriteltyjen operaatioiden $+$ ja $\cdot$ suhteen. Lisäksi $(R[x], +, \cdot)$ on kommutatiivinen jos ja vain jos $(R, +, \cdot)$ on kommutatiivinen.

Todistus. Renkaan $(R[x], +, \cdot)$ nolla-alkio on nollapolynomi 0_R ja sen ykkösalkio on vakiopolynomi $1_D = 1_Dx^0$. Polynomin $a(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$ vasta-alkio on polynomi $-a(x) = -a_0 - a_1x - \cdots - a_nx^n$, missä $-a_i$ on renkaan alkion a_i vasta-alkio kaikilla $i = 0, \ldots, n$. Sen toteamiseksi, että $(R[x], +, \cdot)$ on tosiaan rengas on käytävä kaikki rengaspostulaatit lävitse. Tehdään esimerkkinä assosiatiivisuuden todistaminen ja jätetään muut harjoitukseksi.

Olkoot polynomit $a(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $b(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ ja $c(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$ joukon $R[x]$ alkioita. Silloin käyttäen renkaan R assosiatiivisuutta saadaan

$$\begin{aligned} a(x)(b(x)c(x)) &= a(x)(\textstyle\sum_{t=0}^{m+k} \sum_{j+l=t} b_jc_lx^t) &&= \textstyle\sum_{t=0}^{n+m+k} \sum_{i+j+l=t} a_i(b_jc_l)x^t \\ &= \textstyle\sum_{t=0}^{n+m+k} \sum_{i+j+l=t} (a_ib_j)c_lx^t &&= (\textstyle\sum_{t=0}^{n+m} \sum_{i+j=t} a_ib_jx^t)c(x) = (a(x)b(x))c(x). \end{aligned}$$

Lauseen loppuosa on ilmeinen. □

Rengasta $(R[x], +, \cdot)$ sanotaan *polynomirenkaaksi yli renkaan R*.

Linkit:
Rengas

Esimerkkejä polynomirenkaista