Polynomin nollakohdat

Olkoon $(K[x],+,\cdot)$ polynomirengas yli kunnan $(K,+,\cdot)$. Jos $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in K[x]$ ja $c\in K$, niin merkitään

$$f(c)=a_0+a_1c+\cdots+a_nc^n.$$

Huomaa, että $f(c)$ on kunnan K alkio. Kun polynomi $f(x)$ on kiinnitetty saadaan tuttu polynomikuvaus

$$f:K\to K, \qquad c\mapsto f(c) \quad \forall c\in K.$$

Jos erityisesti $f(c)=0_K$, sanotaan, että c on polynomin $f(x)$ *nollakohta* tai yhtälön $f(x)=0_K$ *juuri*.

Oletetaan, että $f(x),g(x)\in K[x]$ ja $c\in K$. Jos $a(x)=f(x)+g(x)$ ja $b(x)=f(x)\cdot g(x)$, niin nähdään, että $a(c)=f(c)+g(c)$ ja $b(c)=f(c)\cdot g(c)$. Täten jokainen renkaan $(K[x],+,\cdot)$ polynomien toteuttama yhtälö toteutuu kunnassa K, kun muuttujan x paikalle sijoitetaan mikä tahansa kunnan K alkio c.

Lause. Olkoon $f(x)\in K[x]$ ja $c\in K$. Silloin $f(c)=0_K$ jos ja vain jos $(x-c)\mid f(x)$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $f(c)=0_K$. Silloin jakoalgoritmin nojalla on olemassa sellaiset polynomit $q(x),r(x)\in K[x]$, että $f(x)=q(x)(x-c)+r(x)$ ja $\deg r(x)<\deg(x-c)=1$. Täten $r(x)$ on vakiopolynomi $r\in K$. Koska $f(c)=0_K$, niin sijoittamalla c edellä saatuun polynomin $f(x)$ lausekkeeseen saadaan $0_K=q(c)(c-c)+r=r$. Siis $f(x)$ on jaollinen polynomilla $x-c$.

Oletetaan toiseksi, että $(x-c)\mid f(x)$. Silloin on olemassa sellainen polynomi $g(x)\in K[x]$, että $f(x)=g(x)(x-c)$. Sijoittamalla tähän yhtälöön $x=c$ saadaan tulos $f(c)=0_K$. $\square$

Lause. Olkoon $f(x)\in K[x]$ astetta n oleva polynomi. Polynomilla $f(x)$ on enintään n eri nollakohtaa kunnassa K.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla. Jos polynomin $f(x)$ aste $n=0$, niin väite on selvä. Oletetaan, että kaikille enintään $(n-1)$-asteisille polynomeille väite pitää paikkansa. Olkoon $f(x)$ astetta n ja $n\geq 1$. Jos polynomilla $f(x)$ on nollakohta $c\in K$, niin edellisen lauseen mukaan on olemassa sellainen polynomi $f_1(x)\in K[x]$, että $f(x)=(x-c)f_1(x)$. Jos myös c_1 on polynomin $f(x)$ nollakohta ja $c_1\neq c$, niin $0_K=f(c_1)=(c_1-c)f_1(c_1)$. Koska kunnassa ei ole nollanjakajia, niin $f_1(c_1)=0_K$. Siis jokainen polynomin $f(x)$ nollakohdasta c eroava nollakohta on myös polynomin $f_1(x)$ nollakohta. Koska $\deg f_1(x)=\deg f(x)-1=n-1$, niin induktio-oletuksen nojalla polynomilla $f_1(x)$ on enintään $n-1$ nollakohtaa. Täten polynomilla $f(x)$ on enintään n nollakohtaa. $\square$

Määritelmä. Polynomia $f(x)\in K[x]$ sanotaan *jaottomaksi*, jos $f(x)$ ei ole vakiopolynomi eikä kahden positiivista astetta olevan polynomirenkaan $K[x]$ polynomin tulo. Sanotaan, että $f(x)$ on jaoton *yli kunnan* K tai *kunnan* K *suhteen.*

Kaikki ensimmäisen asteen polynomit ovat jaottomia. Jos $f(x)\in K[x]$, $\deg f(x)>1$ ja $f(c)=0_K$, jollakin $c\in K$, niin sivun ensimmäisen lauseen mukaan $f(x)$ ei ole jaoton yli kunnan K. Toisen tai kolmannen asteen polynomi $f(x)$ on jaoton yli kunnan K jos ja vain jos polynomilla $f(x)$ on nollakohta kunnassa K, sillä jos $f(x)$ on jaollinen joillakin polynomeilla, niin ainakin yhden näistä polynomeista on oltava astetta yksi. Mikäli polynomin $f(x)$ aste on suurempi kuin kolme voi polynomi hajota positiiviasteisiin tekijöihin yli kunnan K, vaikkei sillä olisi ainuttakaan nollakohtaa kunnassa K.

Linkit:

Polynomirengas

Polynomin aste

Polynomien jakoalgoritmi

Esimerkkejä polynomirenkaista