Jaottomat polynomit ja kunnat

Sivun Maksimaalinen ihanne lauseen mukaan renkaan $(R,+,\cdot)$ jäännösluokkarengas $(R/I,+,\cdot)$ on kunta jos ja vain jos ihanne I on maksimaalinen. Valitaan nyt renkaaksi $(K[x],+,\cdot)$, kun $(K,+,\cdot)$ on kunta. Osoitetaan, että jaoton polynomi yli kunnan K generoi maksimaalisen pääihanteen. Tästä saadaan muodostettua uusi kunta.

Polynomin $f(x) \in K[x]$ generoima ihanne on sivun Ihanteen generointi ja pääihannerengas lauseen mukaan

$$< f(x) >= \{k(x)f(x) \mid k(x) \in K[x]\}.$$

Huomaa, että $< f(x) >=< cf(x) >$ kaikilla kunnan K nolla-alkiosta eroavilla alkioilla c.

Lemma. Polynomirenkaan $(K[x],+,\cdot)$ kaikki ihanteet ovat pääihanteita, siis $(K[x],+,\cdot)$ on pääihannerengas.

Todistus. Olkoon I polynomirenkaan $(K[x],+,\cdot)$ ihanne. Jos $I = \{0_K\}$, se on pääihanne, nimittäin $< 0_K >$. Oletetaan, että $I \neq \{0_K\}$. Olkoon $b(x)$ ihanteen I jokin pienintä mahdollista ei-negatiivista astetta oleva polynomi. Näytetään, että $I =< b(x) >$.

Koska $b(x) \in I$, niin $< b(x) >\subseteq I$. Jos $a(x) \in I$, niin jakoalgoritmi mukaan on olemassa sellaiset polynomit $q(x), r(x) \in K[x]$, että

$$a(x) = q(x)b(x) + r(x), \quad \text{ja} \quad \deg r(x) < \deg b(x).$$

Koska $r(x) = a(x) - q(x)b(x)$, niin ihannekriteerin nojalla $r(x) \in I$. Polynomin $b(x)$ valinnasta johtuen $r(x) = 0_K$. Täten $a(x) = q(x)b(x) \in< b(x) >$, siis $I \subseteq< b(x) >$. □

Lause. Olkoon $p(x)$ polynomirenkaan $(K[x],+,\cdot)$ jaoton polynomi. Silloin $< p(x) >= I$ on renkaan $K[x]$ maksimaalinen ihanne.

Todistus. Jaottoman polynomin määritelmän mukaan $\deg p(x) \geq 1$. Täten I ei sisällä nollapolynomista eroavia vakiopolynomeja ja on siis renkaan $(K[x],+,\cdot)$ aito ihanne.

Olkoon J sellainen renkaan $K[x]$ ihanne, että I on sen aito osajoukko. On osoitettava, että $J = K[x]$. Edellisen lemman mukaan on olemassa sellainen $b(x) \in K[x]$, että $J =< b(x) >$. Koska $I \subset J$, niin polynomi $p(x)$ on muotoa $k(x)b(x)$, missä $k(x) \in K[x]$. Koska $p(x)$ oletettiin jaottomaksi, on joko $k(x)$ tai $p(x)$ vakiopolynomi. Jos $k(x)$ on vakio, niin $I =< p(x) >=< b(x) >= J$, mikä on vastoin ihanteen J valintaa. Siis $b(x)$ on vakiopolynomi, joten $b(x) = b \in K \setminus \{0_K\}$. Silloin

$$J =< b >=< 1_K >= K[x],$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa sivun Ihanne huomiosta. □

Sivun yhteenvetona on seuraava lause.

Lause. Jos $p(x)$ on polynomirenkaan $(K[x],+,\cdot)$ yli kunnan $(K,+,\cdot)$ jaoton polynomi, niin jäännösluokkarengas $(K[x]/ < p(x) >,+,\cdot)$ on kunta.

Linkit:

Maksimaalinen ihanne

Ihanne

Ihanteen generointi ja pääihannerengas