Kuntalaajennus polynomirenkaassa

Määritelmä. Jos $(K,+,\cdot)$ on kunnan $(L,+,\cdot)$ alikunta, sanotaan, että $(L,+,\cdot)$ on kunnan $(K,+,\cdot)$ *laajennuskunta* tai *kuntalaajennus (extension field, field extension).*

Olkoon $(K,+,\cdot)$ kunta ja $p(x)$ jaoton polynomi yli kunnan K.

Lause. Kunnalla $(K[x]/<p(x)>,+,\cdot)$ on alikuntana $(K',+,\cdot)$, joka on isomorfinen kunnan $(K,+,\cdot)$ kanssa. Kun samaistetaan kunnat K ja K' on kunta $K[x]/<p(x)>$ kunnan K laajennus. Tässä laajennuksessa polynomilla $p(x)$ on nollakohta.

Todistus. Merkitään $I=<p(x)>$, siis I on jaottoman polynomin generoima pääihanne. Kuvaus

$$j:(K,+,\cdot)\to(K[x]/I,+,\cdot),\qquad j(a)=a+I,\quad \forall\, a\in K,$$

on kuntahomomorfismi. Jätetään asian tarkistaminen harjoitukseksi. Sivun Huomioita kunnasta toisen lauseen mukaan kuvauksen j kuva $K'=\mathrm{Im}\,(j)$ on isomorfinen kunnan K kanssa. Koska K' on isomorfinen kunnan kanssa, on se itsekin kunta, joten se on kunnan $K[x]/I$ alikunta. Siis

$$K\simeq K'=\{a+I\mid a\in K\}.$$

Kuntien K ja K' samaistaminen tarkoittaa nyt, että kunnan K alkiot samaistetaan jäännösluokkiin $a+I$.

Erityisesti siis polynomin $p(x)\in K[x]$ kertoimia voidaan ajatella myös kunnan $K[x]/I$ alkioina. Koska symboli x sai merkityksen kunnan $K[x]$ alkioiden merkinnässä, käytetään symbolia y polynomien yli kunnan $K[x]/I$ muuttujana. Siis $p(y)\in(K[x]/I)[y]$. Polynomin $p(y)$ nollakohta on $x+I\in K[x]/I$, sillä käyttäen jäännösluokkien laskusääntöjä saadaan

$$p(x+I)=p(x)+I=0+I=0_{K[x]/I}.$$

□

Linkit:
Huomioita kunnasta