Matematiikan opetus ja tietokoneaikakausi

Simo K. Kivelä

10.12.2004

Matemaatikon sanotaan olevan henkilö, joka määrittelee käsitteitä ja todistaa teoreemoja. Näin ehkä onkin, mutta matematiikkaa on syytä katsoa toisestakin näkökulmasta: se on monien alojen työväline, jolla hallitaan mitä moninaisimpia ilmiöitä. Erityisesti luonnontieteet, tekniikka, nykyään myös yhteiskunta- ja käyttäytymistieteet käyttävät matematiikkaa, jolloin teorian ymmärtämisen lisäksi tulee suoriutua ilmiöiden matemaattisesta mallintamisesta ja tarvittavasta laskemisesta. Kahta näkökulmaa voisi luonnehtia (puhtaaksi) matematiikaksi ja (tieteelliseksi) laskemiseksi.

Laskemisen muuttuminen

Vielä puoli vuosisataa sitten laskeminen tarkoitti lähinnä kynän ja paperin käyttöä. Vaativampia apuvälineitä olivat logaritmitaulut, laskutikku ja mekaaniset laskukoneet, jotka osasivat neljä peruslaskutoimitusta. Sitten tilanne alkoi muuttua: ilmestyivät kooltaan isot tietokoneet, laskimet, yhä monimutkaisemiksi käyvät ohjelmistot, entistä isoa tietokonetta paljon tehokkaammat pöytäkoneet, superkoneet, graafiset sovellukset, viimeksi tietoverkot.

Laskemisen osalta mahdollisuudet ovat siten valtavasti lisääntyneet. Sopivilla ohjelmistoilla pöytäkone laskee hetkessä entisajan logaritmitaulut. Ilmiöille voidaan luoda malleja ja tarkastella niitä laskennallisin keinoin tavalla, johon puoli vuosisataa sitten ei ollut minkäänlaisia mahdollisuuksia.

Opetuksen muuttuminen?

Koulumatematiikkaan tietotekniikan kehitys on vaikuttanut yllättävän vähän. Muutoksia toki on ollut, mutta niiden lähtökohdat ovat yleensä olleet muualla. Joukko-opin tulo 60- ja 70-luvuilla johtui muista syistä, lähinnä matematiikan tutkimuksen abstraktiotason noususta ja tämän suodattumisesta osin epäonnistuneellakin tavalla koulumatematiikkaan. Sen jälkeen palattiin takaisin perusasioihin ja hieman vastentahtoisesti annettiin periksi laskimien tulon aiheuttamalle paineelle.

Yliopistojen peruskursseissa ei kovin paljon ole tapahtunut. Jossakin on alettu käyttää laskentaohjelmistoja, mutta usein hieman päälle liimatusti oikeastaan miettimättä, miten niihin tulisi suhtautua ja mikä olisi niistä saatava hyöty. Sovellusaloilla laskentaohjelmistoja käytetään enemmän. Laskeminen tuntuu siirtyneen matematiikan ulkopuolelle.

Matematiikan opetuksessa ei myöskään kytkentää tietokoneohjelmointiin oikeastaan ole. Enää ohjelmointi ei tarkoittaisi jonkin suhteellisen matalatasoisen ohjelmointikielen käyttöä, vaan se on luonnollinen tapa kuvata algoritmi ympäristönä korkean tason ohjelmisto, jolla myös laskennan toteuttaminen on helppoa.

Kuitenkin matematiikan opintojen tulisi tuottaa kyky hyödyntää matematiikkaa sekä mallintamisessa että tulosten esiin laskemisessa monilla aloilla ja monissa yhteyksissä. Laskeminen tarkoittaa yhä harvemmin kynän ja paperin käyttöä, yhä useammin tietokoneeseen ja johonkin sopivaan ohjelmistoon turvautumista. Poikkeuksena tästä ehkä ovat puhtaassa matematiikassa tutkijan uralle suuntautuvat henkilöt. Lukumääräisesti heitä on kuitenkin vähän soveltajiin verrattuna.

Matematiikan opetukselle edellä sanotusta aiheutuu kahdenlaisia vaatimuksia: Teoreettisen osaamisen on oltava vahvaa ja suhteellisen laaja-alaista. Osaamisen on kytkeydyttävä konkreettiseen soveltamiseen, ts. opittua teoriaa on osattava käyttää sekä mallintamisessa että tulosten esiin laskemisessa.

Laaja-alaisuus on kova vaatimus. Kovin paljon ei voida edellyttää paisuttamatta opintoja liiaksi. Oleellisempaa onkin saavuttaa yleinen kyky löytää ja opiskella se, mitä kulloinkin tarvitaan, ts. jonkinlainen potentiaalinen laaja-alaisuus. Tämä edellyttää matematiikan luonteen ja metodologian hallitsemista. Opintojen tulisi siis koostua hieman syvemmästä opiskelusta jollakin osa-alueella ja pinnallisemmasta perehtyneisyydestä moniin muihin alueisiin.

Osaamisen kytkeminen konkreettiseen laskemiseen — jolloin välineenä on tietokone ja jokin sopiva ohjelmisto — antaa tietotekniikan ja matematiikan soveltamisen perustaidot. Sillä on toinenkin merkitys: Teoreettisten käsitteiden käyttö mallintamisessa ja laskemisessa syventää niiden ymmärtämistä. Tietokoneen käyttö on tietyllä tavoin lahjomatonta: Jos saadut tulokset eivät ole oikein tai ohjelma ei toimi, asia ei ole kunnossa. Ei riitä, että teoria on suurinpiirtein ymmärretty ja laskut melkein oikein.

Matematiikan täsmällinen käsittely opinnoissa on periaatteessa hyvä asia. Se korostaa huolellisen ajattelun tärkeyttä. Liian usein se kuitenkin kääntyy vastakohdaksi, pakolliseksi rituaaliksi, jonka muodot täytyy opetella, mutta jonka tarkoitusta ei ymmärretä. Formaalisuutta ei tämän takia pitäisikään korostaa liiaksi, vaan opiskelijan tulisi oppia näkemään, mitkä ovat todelliset syyt perusteluiden tarpeeseen. Näkemistä auttaa, jos joutuu itse ratkaisemaan ja ohjelmoimaan laajahkoja tehtäväkokonaisuuksia.

Matematiikan opetus niin koulutasolla kuin ammattikorkeakoulu- ja yliopistotasollakin kaipaa uutta näkemystä, jossa tietotekniikan yleistyminen otetaan huomioon. Lisäpiirre synty vielä siitä, että yhä suurempi osa ikäluokasta pyritään kouluttamaan yhä vaativampiin tehtäviin.

En tässä yhteydessä lähde konkretisoimaan asiaa pitemmälle, mutta esitän muutaman esimerkin matemaattisten tehtävien ratkaisemisesta tietokoneella. Nämä ovat peräisin omasta opetuksestani. Ehkä ne voivat toimia virikkeinä keskusteluun.

Esimerkkejä

Jokaiseen esimerkkiin liittyy Mathematica-ohjelmistolla laadittu sähköinen dokumentti, josta löytyy sekä selaimella luettava www-versio että alkuperäinen Mathematicalla luettava muoto (notebook).

Ääriarvoprobleema

`http://matta.hut.fi/matta/mma/maximum.html`
`http://matta.hut.fi/matta/mma/maximum.nb`

Tehtävä on vuoden 2000 pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta.

Astia on kärjellään seisova avonainen ympyräkartio. Kartion pohjan säde on 6,6 cm ja sivujana 11,0 cm. Astia on täynnä vettä. Astiaan asetetaan pallo, joka sivuaa kartion vaippaa. Määritä pallon säde siten, että astiasta valuva vesimäärä on mahdollisimman suuri.

Kyseessä on perinteinen ääriarvotehtävä, jonka ratkaiseminen käsin on helpompaa tai vaikeampaa riippuen siitä, miten laskija tulee valinneeksi muuttujat. Yksinkertaisimpaan ratkaisuun johtavaa valintaa voi kokeneenkin laskijan olla vaikeata ennalta nähdä. Monimutkaiseen tapaan johtuminen merkitsee hankalia lausekkeita ja siten virhealttiutta.

Jos käytetään laskentaohjelmaa, ei lausekkeiden yksinkertaisuudella tai monimutkaisuudella ole merkitystä. Oleellinen vaikeus on muualla: laskenta, ts. muuttujat, yhtälöt ja ratkaisustrategia on jotenkin pidettävä hallinnassa.

Käsinlaskua varten tulisi opetuksesa painottaa kykyä virheettömään lausekkeiden käsittelyyn. Tehtävät eivät saa kuitenkaan olla laskennallisesti liian työläitä. Tietokonetta käytettäessä kyky kokonaisuuden hahmottamiseen on tärkeämpää ja tehtävät voivat olla laajempia. Jos vain toinen painotus voidaan valita, niin kumpi?

Ääriarvon laatua (maksimi, minimi) tutkittaessa on perinteisesti ja rituaalinomaisesti piirretty derivaatan merkkikaavioita. Jos käytetään tietokonetta, erilaisia graafisia esityksiä funktioiden kuvaajista voidaan piirtää helposti. Tulisiko grafiikan käyttöä ja 'kuvasta katsomista' suosia aiempaa enemmän? Samalla voitaisiin luopua formaaleista vaatimuksista.

Esimerkin verkkodokumentissa on tilanteen mallikuvio piirretty Mathematican käskyillä. Näin toki voi tehdä, mutta välttämätöntä se ei ole. Kynää ja paperiakin voi käyttää. Ne ovat edelleen hyviä välineitä.

Polynomien sieventäminen

`http://matta.hut.fi/matta/mma/poly.html`
`http://matta.hut.fi/matta/mma/poly.nb`

Osoita, että $xy + yz + zx = -\frac{1}{2}$*, kun* $x + y + z = 0$ *ja* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Kyseessä on syksyn 2000 pitkän matematiikan ylioppilastehtävä.

Laskentaohjelmaa käytettäessä ratkaisu on hämmentävän yksinkertainen: Annetaan sieventämiskäsky (`Simplify`), jossa sievennettävänä lausekkeena on $xy + yz + zx$ ja ehtoina annetut kaksi yhtälöä. Tuloksena saadaan $-\frac{1}{2}$.

Mitä siis pitäisi oppia? Riittääkö tieto oikean käskyn nimestä? Vai pitäisikö olla myös ainakin periaatteellisella tasolla jonkinlainen tieto siitä, mitä tämän käskyn sisällä tapahtuu? Vertailun vuoksi kannattanee miettiä jakolaskun tai neliöjuuren laskemista laskimella. Mitä pitäisi tietää laskimen näppäimen takana olevasta toiminnasta?

Integraali

`http://matta.hut.fi/matta/mma/integral.html`
`http://matta.hut.fi/matta/mma/integral.nb`

Tehtävä on Teknillisen korkeakoulun uusille opiskelijoille suunnatun Mathematica-alkeiskurssin tentistä.

Laske Mathematicalla integraali $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos x + 2}\,dx$ *kolmella eri tavalla: a) suoraan määrättynä integraalina symbolisesti, b) numeerisesti, c) muodostamalla ensin integraalifunktio ja sijoittamalla rajat tähän. Selitä, miksi tulokset eroavat.*

Ensimmäisessä kohdassa saadaan $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, toisessa 3.6276, joka osoittautuu edellisen likiarvoksi, ja viimeisessä kohdassa 0. Kaikissa tapauksissa luonnollisesti pitäisi tulla sama tulos.

Opiskelijoiden antamat selitykset olivat yllättäviä. Huomattavan moni totesi vain 'koska ne ovat eri suuria'. Mitään ihmettelyä ei siis aiheuttanut, että samalle integraalille saadaan erilaisia arvoja.

Oman työn tarkistaminen ja ongelmien syiden etsiminen on kuitenkin tärkeä taito, jonka merkitys korostuu laajoja tehtäviä tietokoneella ratkaistaessa. Tulosten varmistamiseksi on usein syytä pyrkiä laskemaan sama asia eri tavoilla, ja mikäli tulokset eivät ole samoja, on lähdettävä etsimään syytä.

Tehtävässä olisi viimeistään kuvaajan piirtämisellä nähnyt, että integrandi on positiivinen, eikä integraali siis voi olla $= 0$. Toinen kuvaaja olisi osoittanut, että syntynyt integraalifunktio on epäjatkuva (se sisältää arctan-funktion, mutta ei additiivisia vakioita), vaikka sen integraalifunktiona pitäisi olla jatkuva. Tämä selittääkin kolmannen kohdan tuloksen.

Edellytyksenä päättelyihin tietenkin on, että integraalifunktion jatkuvuus ei ole vain irrallinen ulkoa opittu tieto, vaan sitä osataan myös käyttää.

Kexleruksen viiniongelma

`http://matta.hut.fi/matta/mma/kexlerus.html`
`http://matta.hut.fi/matta/mma/kexlerus.nb`

Simon Kexlerus oli Suomen ensimmäinen matematiikan professori, joka työskenteli Turun Akatemiassa sen perustamisesta lähtien vuosina 1640–1669. Seuraava probleema on häneltä peräisin Turun Aboa Vetus -museon mukaan:

Sinulla on viinejä, jotka maksavat 3, 5, 8 ja 10 markkaa pullolta. Ota yhteensä kymmenen täyttä pulloa ja tee niistä sekoitus, joka maksaa 6 markkaa pullolta. Montako pulloa kutakin viinilajia on otettava?

Kyseessä on kokonaislukuongelma, jossa on neljä tuntematonta, kunkin viinilajin pullojen määrät. Näiden määrien tulee toteuttaa määrää koskeva ehto (summa = 10) ja rahoja koskeva ehto.

Ohjelmoija ratkaisisi tehtävän helposti ja hieman raa'asti: Kutakin viinilajia on ilmeisesti otettava ainakin 0 pulloa ja enintään 10 pulloa, jolloin kussakin tapauksessa on 11 vaihtoehtoa. Kaikkiaan vaihtoehtoja on $11^4 = 14\,641$ kappaletta. Tehdään ohjelmasilmukka, jolla kokeillaan, mitkä vaihtoehdot täyttävät asetetut ehdot. Laskenta ei nykyisissä tietokoneissa kestä oikeastaan lainkaan, ja saadaan seitsemän mahdollisuutta.

Ongelman ratkaisua voi tietenkin lähestyä myös lukuteoreettisesti ja hyödyntää Diofantoksen yhtälöiden ominaisuuksia.

Kumpi sitten on parempi tapa? Ohjelmakoodin kirjoittaa nopeasti, ja ajo on nopea ainakin kyseesä olevassa esimerkissä, jossa pulloja ei ole liian paljon. Diofantoksen yhtälöiden käyttö on kuitenkin jollakin tavoin matemaattisempaa. Pitäisikö opettaa ohjelmointia vai matematiikan teoriaa?

Kiinnostavaa olisi muuten tietää, miten Kexlerus itse ratkaisi ongelmansa.

Frégier'n lause

`http://matta.hut.fi/matta/mma/fregier.html`
`http://matta.hut.fi/matta/mma/fregier.nb`

Ns. Frégier'n lause on seuraava:

Olkoon P toisen asteen käyrällä sijaitseva piste ja olkoot PA ja PB kaksi tämän pisteen kautta kulkevaa toisiaan vastaan kohtisuoraa käyrän jännettä. Tällöin on olemassa kiinteä piste Q, jonka kautta suora AB kulkee riippumatta siitä, missä asennossa kohtsuorat jänteet PA ja PB ovat. Piste Q sijaitsee pisteeseen P asetetulla käyrän normaalilla.

Tehtävän yksinkertainen erikoistapaus, missä käyrä on paraabeli $y = x^2$ ja piste P on sen huippu, on ollut pitkän matematiikan ylioppilastehtävänä keväällä 2001.

Toisen asteen käyrillä on useita lauseessa esitetyn tyyppisiä ominaisuuksia. Nämä voidaan usein todistaa puhtaasti geometrisin keinoin, mutta tarvittavaa geometriaa ei nykyään juurikaan opeteta ja tuskin se olisi perusteltuakaan. Toisena vaihtoehtona on todistaminen algebrallisesti analyyttisella geometrialla. Tämä johtaa herkästi siinä määrin mittaviin laskuihin, että käsin laskeminen tuskin on mielekästä. Symbolisella laskentaohjelmalla työ on kuitenkin kohtuullinen. Se opettaa myös järjestelmällistä ajattelua ja antaa alkeisalgebran taitoja, joilla on käyttöä laajemminkin.

Olisiko tämäntyyppisillä tehtävillä käyttöä vaikkapa harjoitustöinä?

Kaoottinen heiluri

`http://matta.hut.fi/matta/delta/sovell/heiluri2.html`
`http://matta.hut.fi/matta/delta/nb/heiluri2.nb`

Heilurin varren pituus on L ja sen päässä on pistemäinen paino massaltaan m_1. Painoon on kiinnitetty toinen vastaavanlainen heiluri varren pituutena L ja painon massana m_2. Tutki heilurin liikettä olettaen, että heilahtelut tapahtuvat tasossa.

Kyseessä on fysikaalisen ilmiön mallintaminen matemaattisesti differentiaaliyhtälöillä ja näiden ratkaiseminen.

Lagrangen teoria antaa differentiaaliyhtälöiksi

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + m\frac{d^2\theta_2}{dt^2}\cos(\theta_2-\theta_1) - m\left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2\sin(\theta_2-\theta_1) + \frac{g}{L}\sin\theta_1 = 0,\\
&\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \frac{d^2\theta_1}{dt^2}\cos(\theta_2-\theta_1) + \left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2\sin(\theta_2-\theta_1) + \frac{g}{L}\sin\theta_2 = 0,
\end{aligned}$$

missä $m = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}$. Näiden ratkaisu alkeisfunktioiden avulla ei onnistu. Numeerinen ratkaiseminen halutuista alkuehdoista lähtien sen sijaan on mahdollista, mutta vaatii luonnollisesti melkoisen määrän laskutyötä. Laskentaohjelmalla tämä kuitenkin sujuu vaivattomasti.

Saaduista ratkaisuista voidaan piirtää erilaisia graafisia esityksiä. Heilurin liike voidaan myös animoida, jolloin saadaan havainnollinen kuva ilmiön luonteesta.

On myös mahdollista astua askel pidemmälle: Rakennetaan todellinen fysikaalinen heilurisysteemi ja kerätään tämän liikkeestä data mittauksilla. Vertaamalla laskettua ja havaittua päästään pohtimaan matemaattisen mallin tarkkuutta ja mahdollisia virhelähteitä. Alkuehtoja muuttamalla voidaan tutkia mahdollisuutta ennustaa kaoottisen ilmiön käyttäytymistä.