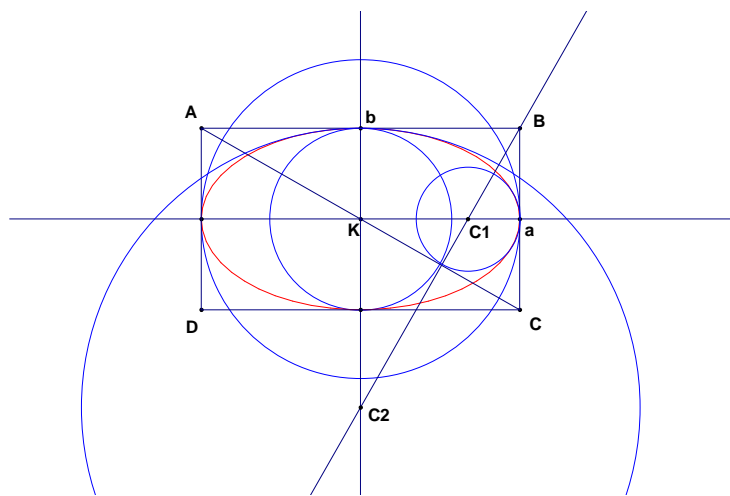


Ellipsin kaarevuusympyrät

Minkä tahansa käyrän kaartumista jossakin sen pisteessä voidaan mitata muodostamalla pisteen kautta kulkeva ympyräviiva, jonka kaartuminen on yhtä voimakasta kuin käyrän kaartuminen kyseisessä pisteessä. Ympyrää kutsutaan käyrän *kaarevuusympyräksi* ja ympyrän sädettä käyrän *kaarevuussäteeksi* kyseisessä pisteessä. *Kaarevuus* on kaarevuussäteen käänteisarvo. Kaarevuus on siis sitä suurempi, mitä jyrkemmin käyrä kaartuu.

Edellä sanottu ei luonnollisestikaan ole kaarevuusympyrän määrittely: 'yhtä voimakas kaartuminen' vaatii täsmällisen määrittelyn. Tämä voidaan tehdä differentiaalilaskennan keinoin, mutta tässä yhteydessä siihen ei lähemmin paneuduta.

Usein käyrän kulku voidaan hahmotella, jos sen kaarevuusympyrät riittävän monissa pisteissä tunnetaan. Ellipsin tapauksessa riittää melko hyvin tuntea akselien päätepisteisiin liittyvät ympyrät. Nämä saadaan yksinkertaisella geometrisella konstruktiolla:



Piirretään ellipsiä ympäröivä suorakulmio $ABCD$, jonka sivut ovat ellipsin pääakseleiden suuntaiset ja pituudeltaan siis $2a$ ja $2b$. Suorakulmiolle piirretään jompikumpi lävistäjä, esimerkiksi AC ja tälle normaalit kahden muun kärkipisteen, tällöin B ja D , kautta. Pisteestä B kautta kulkeva normaali leikkaa ellipsin ison akselin pisteessä C_1 ja pikku akselin jatkeen pisteessä C_2 . Nämä ovat ison akselin toiseen päätepisteeseen ja pikku akselin toiseen päätepisteeseen liittyvien kaarevuusympyröiden keskipisteet. Kaarevuusympyrät voidaan siis piirtää.

Vastakkaisiin päätepisteisiin liittyvät symmetriset kaarevuusympyrät saadaan vastaavasti pisteen D kautta kulkevan normaalin avulla.

Jos ellipsin akselit tunnetaan, voidaan kaarevuusympyrät konstruoida. Itse ellipsin voi tällöin likimääräisesti hahmotella vapaalla kädellä, kuten kuvion oikean ylänurkan osasta ilmenee: Punainen ellipsinkaari liittyy kummankin akselin päätepisteen lähellä piirustustarkkuuden rajoissa varsin tarkoin vastaavaan kaarevuusympyrään ja siirtyy ympyrältä toiselle melko lyhyellä matkalla.

Oheinen kuvio on laadittu Cabri-Geometria-ohjelmalla. Cabri-dokumentissa ellipsin kokoa ja muotoa voidaan muuttaa tarttumalla hiirellä K -keskisiin ympyröihin ja kasvattamalla tai pienentämällä näiden säteitä. Muu konstruktio muuttuu tällöin vastaavasti.

Harjoitustehtäviä

Piirrä ellipsejä kuvatulla menetelmällä ja arvioi tulosten hyvyyttä. Miten piirtämiseen tarkkuuden vaikuttaa ellipsin akselien suhde? Osoita esitetyn konstruktion perusteella, että kaarevuusympyröiden säteet ovat a^2/b ja b^2/a . Perehdy kaarevuussäteiden laskemiseen differentiaalilaskennan avulla ja osoita, että tällä tavoin saadaan em. arvot kaarevuussäteille, ts. että esitetty konstruktio todellakin antaa kaarevuusympyrät.

Linkkejä

Vastaava Cabri-dokumentti

Cabri-ohjeet

Simo K. Kivelä 07.04.2004