Miksi kompleksilukuja?

Lukualueen vaiheittaisen laajentamisen luonnollisista luvuista kokonaislukujen ja rationaalilukujen kautta reaalilukuihin ($\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$) voidaan katsoa syntyvän tarpeesta löytää ratkaisu yhä uusille yhtälötyypeille: $x+2=0$ ei ratkea luonnollisten lukujen joukossa, mutta kylläkin kokonaislukujen joukossa; $2x+3=0$ ei ratkea kokonaislukujen, mutta kyllä rationaalilukujen joukossa; yhtälöllä $x^2=2$ ei ole rationaalista ratkaisua, mutta reaalilukujoukkoon kuuluva ratkaisu löytyy.

Samaa ajattelua voidaan yrittää jatkaa: Yhtälö $x^2+1=0$ ei ratkea reaalilukujoukossa, mutta voitaisiinko lukujoukkoa laajentaa siten, että sille kuitenkin löytyisi ratkaisu?

Suoraviivainen mahdollisuus on päättää ottaa käyttöön 'luku' i, jolla on ominaisuus $\mathrm{i}^2=-1$, ja sopia lisäksi, että sillä lasketaan reaalilukujen laskusääntöjä noudattaen. Tällöin on $(-\mathrm{i})^2=\mathrm{i}^2=-1$, ja yhtälölle $x^2+1=0$ on saatu kaksi ratkaisua, i ja $-\mathrm{i}$. Jotenkin luontevaa on tällöin myös kirjoittaa $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, vaikka tämä joissakin yhteyksissä osoittautuukin hieman ongelmalliseksi.

Edellä oleva jättää kuitenkin avoimeksi, mikä i oikeastaan on ja voidaanko ristiriitoihin joutumatta sopia, että sillä lasketaan reaalilukujen tapaan.

Kompleksiluvut määritelläänkin tämän takia hieman toisin ottamalla lähtökohdaksi xy-taso $\mathbb{R}^2$, jota ryhdytään kutsumaan *kompleksitasoksi*. Määrittelyprosessin tuloksena saadaan kompleksilukualgebra, jossa neljä peruslaskutoimitusta toimivat samoilla säännöillä kuin reaalilukualgebrassa. Lisäksi on voimassa $\mathrm{i}^2=-1$. (Kaikki aritmetiikka ei kuitenkaan toimi samoin kuin reaalialueella: $-1=\mathrm{i}^2=(+\sqrt{-1})(+\sqrt{-1})=+\sqrt{(-1)(-1)}=+\sqrt{+1}=+1$. Jokin yhtäläisyysmerkeistä on ilmeisestikin väärä!)

Kompleksiluvut osoittautuvat merkityksellisiksi monissa muissakin suhteissa kuin polynomiyhtälöiden ratkaisemisessa. Niitä tarvitaan sekä monilla matematiikan osa-alueilla että sovellettaessa matematiikkaa muissa tieteissä.

Linkkejä

Kompleksilukujen määrittely

Simo K. Kivelä 20.04.2005