Kompleksilukujen määrittely

Lähtökohtana olkoon xy-taso, ts. joukko

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{\,(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\,\}.$$

Tätä aletaan kutsua *kompleksitasoksi* tai *kompleksilukujoukoksi* ja sille käytetään symbolia $\mathbb{C}$. Joukon alkioita merkitään lyhyesti $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$ jne. ja niitä kutsutaan *kompleksiluvuiksi*.

Joukon $\mathbb{C}$ alkioille määritellään *yhteenlasku* ja *kertolasku* kaavoilla

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (x_1+x_2,\ y_1+y_2),\\ z_1z_2 &= (x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1). \end{aligned}$$

Esimerkiksi kompleksilukujen $z_1=(1,2)$ ja $z_2=(3,4)$ summa ja tulo ovat siis

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (1+3,\ 2+4)=(4,6),\\ z_1z_2 &= (1\cdot3-2\cdot4,\ 1\cdot4+2\cdot3)=(-5,10). \end{aligned}$$

Osoittautuu, että kompleksiluvuilla, so. muotoa $z=(x,y)$ olevilla symboleilla voidaan tällöin laskea samoilla säännöillä kuin reaaliluvuilla. Erityisesti on olemassa kompleksiluvut *nolla* $(0,0)$ ja *ykkönen* $(1,0)$, jotka käyttäytyvät kuten reaaliluvut 0 ja 1: nollan lisääminen toiseen kompleksilukuun ei muuta sitä, toisen luvun kertominen ykkösellä ei muuta sitä.

Jokaisella kompleksiluvulla $z=(x,y)$ on *vastaluku* $-z=(-x,-y)$. Kun luku ja vastaluku lasketaan yhteen, saadaan nolla $(0,0)$.

Jokaisella kompleksiluvulla $z=(x,y)$, joka poikkeaa nollasta, ts. ainakin toinen luvuista x ja y on $\neq 0$, on myös käänteisluku:

$$z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Luvun ja käänteisluvun tulo on ykkönen $(1,0)$, kuten laskemalla voidaan tarkistaa.

Erikoisasemassa osoittautuu olevan kompleksiluku $(0,1)$, jolle annetaan nimeksi *imaginaariyksikkö* ja jolle käytetään symbolia i. Tämän tulo itsensä kanssa, ts. toinen potenssi on kertolaskun määritelmän perusteella $(-1,0)$.

Linkkejä

Miksi kompleksilukuja?
Reaaliluvut kompleksilukujen osajoukkona
Kompleksilukujen kunta

Simo K. Kivelä 20.04.2005