# Reaaliluvut kompleksilukujen osajoukkona

Reaalilukujoukko $\mathbb{R}$ upotetaan kompleksitasoon $\mathbb{C}$ samastamalla $x \in \mathbb{R}$ ja $(x,0) \in \mathbb{C}$. Tällöin aletaan myös merkitä $x = (x,0)$. Kompleksitason nollalle ja ykköselle saadaan tällöin luonnolliset merkinnät: $0 = (0,0)$ ja $1 = (1,0)$.

Samastus johtaa merkintään, jota yleensä käytetään kompleksilukuja käsiteltäessä:

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + \mathrm{i}y.$$

Tässä $\mathrm{i} = (0,1)$ on *imaginaariyksikkö*.

Kompleksiluvun $z = x + \mathrm{i}y$ *reaaliosa* on $\operatorname{Re} z = x$ ja *imaginaariosa* $\operatorname{Im} z = y$. Lukua $\bar{z} = x - iy$ kutsutaan luvun $z$ *liittoluvuksi* eli *konjugaatiksi*.

Kompleksiluvun $z = x + \mathrm{i}y$ *itseisarvo* on $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, ts. pisteen $(x,y)$ etäisyys origosta. On myös voimassa $|z|^2 = z\bar{z}$ (mutta $|z|^2 \neq z^2$, jos $z$ on aidosti kompleksinen, ts. $y \neq 0$).

Reaalilukujen samastaminen kompleksilukujen osajoukoksi ei ole järkevää, elleivät kummassakin joukossa toisistaan riippumatta määritellyt laskutoimitukset ole myös samastettavissa. Tämä tarkoittaa, että laskutoimituksen tuloksen täytyy olla riippumaton siitä, kumpi suoritetaan ensin, samastus vai laskutoimitus. Näin todella on, mikä ilmenee seuraavista *kommutoivista kaavioista*: niissä päästään vasemmasta ylänurkasta oikeaan alanurkkaan kumpaa tahansa tietä.

$$\begin{array}{ccc}
x_1, x_2 & \xrightarrow{\text{yhteenlasku } \mathbb{R}\text{:ssä}} & x_1 + x_2 \\
\text{samastus} \downarrow & & \downarrow \text{samastus} \\
(x_1,0),(x_2,0) & \xrightarrow{\text{yhteenlasku } \mathbb{C}\text{:ssä}} & (x_1 + x_2, 0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
x_1, x_2 & \xrightarrow{\text{kertolasku } \mathbb{R}\text{:ssä}} & x_1 x_2 \\
\text{samastus} \downarrow & & \downarrow \text{samastus} \\
(x_1,0),(x_2,0) & \xrightarrow{\text{kertolasku } \mathbb{C}\text{:ssä}} & (x_1 x_2, 0)
\end{array}$$

Tuloksena on saatu kompleksilukujoukko $\mathbb{C}$, jonka luvut ovat muotoa $x + \mathrm{i}y$. Näiden peruslaskutoimitukset yhteen-, vähennys- (= vastaluvun lisäys), kerto- ja jakolasku (= käänteisluvulla kertominen) noudattavat samoja sääntöjä kuin reaalilukujoukossa. Lisäksi lausekkeita voidaan sieventää yhtälön $\mathrm{i}^2 = -1$ avulla.

**Linkkejä**

Kompleksilukujen määrittely
Kompleksilukujen napakoordinaattiesitys

*Simo K. Kivelä* 21.04.2005