Yhtälöitä ja epäyhtälöitä

Kompleksilukujen summan liittoluku voidaan muodostaa termeittäin, tulon vastaavasti tekijöittäin:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2, \qquad \overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2.$$

Huomionarvoisia yhtälöitä ovat myös seuraavat:

$$\overline{\overline{z}}=z, \qquad |\overline{z}|=|z|, \qquad z\overline{z}=|z|^2, \qquad \frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Itseisarvon suhde laskutoimituksiin on samanlainen kuin reaaliluvuilla:

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \qquad |z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|.$$

Kertolaskun tapauksessa kyseessä on siis yhtälö, yhteenlaskun tapauksessa epäyhtälö. Jälkimmäinen on oikeastaan osa pidempää epäyhtälöketjua, ns. *kolmioepäyhtälöä*:

$$||z_1|-|z_2||\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|.$$

Yhtälöiden todistukset ovat varsin suoraviivaisia laskuja, kun kompleksiluvut kirjoitetaan reaali- ja imaginaariosansa avulla, so. muotoon $z=x+iy$. Kolmioepäyhtälön tapauksessa työtä on hieman enemmän:

Koska $z+\overline{z}=2x=2\,\mathrm{Re}\,z$ ja $|\mathrm{Re}\,z|=|x|\le\sqrt{x^2+y^2}=|z|$ kaikilla kompleksiluvuilla z, on

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2\\&=|z_1|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)+|z_2|^2\\&\begin{cases}\le|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2,\\\ge|z_1|^2-2|z_1||z_2|+|z_2|^2=(|z_1|-|z_2|)^2,\end{cases}\end{aligned}$$

mistä seuraakin

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|&\le|z_1|+|z_2|,\\|z_1+z_2|&\ge||z_1|-|z_2||.\end{aligned}$$

Linkkejä

Kompleksilukujen itseisarvo, liittoluku

Simo K. Kivelä 26.04.2005