Kompleksilukujen tulo ja potenssit

Olkoon annettuna kaksi kompleksilukua napakoordinaattimuodossa:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Lukujen itseisarvot ovat r_1 ja r_2, niiden napakulmat (argumentit) φ_1 ja φ_2.

Lukujen tulo saadaan sinin ja kosinin yhteenlaskukaavojen avulla muotoon

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \sin\varphi_2)]. \end{aligned}$$

Vastaavaan tapaan saadaan luvun $z \neq 0$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ käänteisluvulle

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z^2|} = \frac{r(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{r^2} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)].$$

Kummassakin tapauksessa tulokset ovat napakoordinaattimuotoja. Lukujen tulon itseisarvo on siis r_1r_2 ja napakulma $\varphi_1 + \varphi_2$. Käänteisluvun muodostuksessa itseisarvo muuttuu käänteisluvuksi ja napakulma vastaluvuksi. Siis:

$$\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2), \qquad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z.$$

Jos $|z| = 1$, luku voidaan kirjoittaa muotoon $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Edellä esitetystä seuraa tällöin $z^2 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$ ja yleisemmin ns. *de Moivren* kaava

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Tässä n voi olla mikä tahansa kokonaisluku, mikä nähdään yhdistämällä edellä olevat tuloa ja käänteislukua koskevat tulokset.

Linkkejä

Kompleksiluvun napakoordinaattiesitys
Kiertotekijä
Kompleksiluvun juuret
Kompleksilukujen tulo (interaktiivinen dokumentti)

Simo K. Kivelä 26.04.2005