Kompleksilukujen juuret

Olkoon laskettavana $w = \sqrt[n]{z}$, kun z on annettu. Yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $w^n = z$, missä w on tuntematon. Napakoordinaattiesitysten $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ ja $w = s(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ avulla yhtälö saa muodon

$$s^n(\cos n\psi + \mathrm{i}\sin n\psi) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Tällöin tulee olla $s^n = r$ ja sin- ja cos-funktioiden jaksot huomioon ottaen $n\psi = \varphi + 2k\pi$, missä k on kokonaisluku. Näistä seuraa

$$s = \sqrt[n]{r}, \qquad \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Koska ψ on kompleksiluvun napakulma, riittää tarkastella niitä luvun k arvoja, jotka antavat napakulman yhden kierroksen alueelta. Helpointa on rajoittaa jaksotermi $2k\pi/n$ välille $[0, 2\pi[$, ts. tarkastella arvoja $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. Näitä vastaten juurelle $w = \sqrt[n]{z}$ saadaan n arvoa: $w_0,\ w_1,\ \ldots,\ w_{n-1}$.

Juuret voidaan kirjoittaa muotoon

$$w_k = w_0 u_n^k, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

missä $w_0 = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{n})$ ja $u_n = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$ on kiertotekijä.

Juuret sijaitsevat tasavälisesti sellaisen ympyrän kehällä, jonka säde on $\sqrt[n]{r}$. Kertomalla edellinen juuri kiertotekijällä päästään seuraavaan juureen.

Jos $z \neq 0$, sillä on n eri suurta juurta. Näistä jokin määritellään juuren pääarvoksi. Laskentaohjelmissa tämä on yleensä se, jolla on itseisarvoltaan pienin napakulma.

Linkkejä

Kompleksilukujen tulo ja potenssit
Kiertotekijä
Kompleksiluvun juuren laskeminen (esimerkki)

Simo K. Kivelä 27.04.2005