Polynomin tekijöihin jako

Astetta n olevalla kompleksikertoimisella (tai reaalikertoimisella) polynomilla $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ on algebran peruslauseen mukaan ainakin yksi (mahdollisesti kompleksinen) nollakohta z_1. Tällöin siis on $p_n(z_1) = 0$.

Jakolaskun $p_n(z)/(z - z_1)$ tuloksena saadaan osamäärä $q_{n-1}(z)$, joka on $n-1$-asteinen polynomi, ja jakojäännös $r(z)$. Koska jakojäännös on alempaa astetta kuin jakaja, on polynomin $r(z)$ asteluku 0, ts. kyseessä on vakio: $r(z) = r$. Tällöin on

$$p_n(z) = (z - z_1)q_{n-1}(z) + r.$$

Sijoittamalla tähän $z = z_1$ saadaan $r = 0$, jolloin

$$p_n(z) = (z - z_1)q_{n-1}(z),$$

ts. polynomi $p_n(z)$ on jaollinen tekijällä $z - z_1$.

Askel voidaan toistaa: Jos $n - 1 > 0$, polynomilla $q_{n-1}(z)$ on nollakohta z_2 ja $q_{n-1}(z)$ on jaollinen tekijällä $z - z_2$. Tällöin $p_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)q_{n-2}(z)$. Näin voidaan jatkaa, kunnes päädytään yhtälöön

$$p_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)q_0(z).$$

Polynomin $q_0(z)$ asteluku on 0, joten kyseessä on vakio eikä algebran peruslausetta enää voida soveltaa. Oikeanpuolen kertolasku osoittaa, että kyseessä on potenssin z^n kerroin, ts. $q_0(z) = a_n$.

Siis:

Polynomi voidaan aina jakaa ensimmäistä astetta oleviin tekijöihin:

$$p_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

Luvut $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ovat polynomin $p_n(z)$ nollakohdat. Niiden joukossa saattaa olla yhtä suuria ja reaalisenkin polynomin tapauksessa ne saattavat kaikkikin olla kompleksisia. Jos yhtä suuret juuret lasketaan kertalukunsa mukaisesti, ts. otetaan niin moneen kertaan kuin ne tekijöissä esiintyvät, voidaan sanoa, että astetta n olevalla polynomilla on n nollakohtaa.

Tarkkoja arvoja polynomin nollakohdille ei aina voida löytää. Viidennen ja korkeampien asteiden polynomien nollakohdille ei ole olemassa yleisiä ratkaisukaavoja. Mielivaltaisen tarkkoja numeerisia approksimaatioita voidaan kyllä löytää.

Linkkejä

Polynomit, algebran peruslause
Reaalikertoimisen polynomin nollakohdat
Esimerkki polynomin tekijöihin jakamisesta
Neljännen asteen polynomin kuvaaja ja nollakohdat (interaktiivinen dokumentti)

Simo K. Kivelä 03.05.2005