Reaalikertoimisen polynomin nollakohdat

Olkoon z_0 reaalikertoimisen polynomin $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ kompleksinen nollakohta. Tällöin on

$$p(z_0) = 0 \qquad \text{eli} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k = 0.$$

Siirtymällä puolittain liittolukuihin saadaan

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k \overline{z}_0^k = 0,$$

koska summan ja tulon liittoluvut voidaan muodostaa termeitttäin ja tekijöittäin. Polynomin reaalikertoimisuuden takia tämä saa muodon

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}_0^k = 0,$$

ts. $p(\overline{z}_0) = 0$.

Siis:

Jos reaalikertoimisella polynomilla on nollakohtana kompleksiluku z_0, myös liittoluku $\overline{z}_0$ on polynomin nollakohta. Reaalikertoimisen polynomin kompleksiset juuret esiintyvät aina tällä tavoin pareittain.

Tällaisessa tapauksessa polynomin esityksessä ensimmäisen asteen tekijöiden avulla on tekijät $z - z_0$ ja $z - \overline{z}_0$. Näiden tulo on

$$(z - z_0)(z - \overline{z}_0) = z^2 - (z_0 + \overline{z}_0) + z_0\overline{z}_0 = z^2 - (\mathrm{Re}\, z_0)z + |z_0|^2,$$

mikä on reaalikertoiminen toisen asteen tekijä.

Siis:

Reaalikertoiminen polynomi voidaan aina jakaa enintään toista astetta oleviin reaalikertoimisiin tekijöihin. Reaalisia nollakohtia vastaavat ensimmäisen asteen tekijät, nollakohtina olevia liittolukupareja vastaavat toisen asteen tekijät.

Linkkejä

Polynomin tekijöihin jako
Esimerkki polynomin tekijöihin jakamisesta

Simo K. Kivelä 03.05.2005