Esimerkki polynomin tekijöihin jaosta

Esimerkki 1. Yhtälöstä $z^4 = 1$ seuraa $z^2 = 1$ ja $z^2 = -1$ ja näistä edelleen yhtälön juuret $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = \mathrm{i}$ ja $z_4 = -\mathrm{i}$. Polynomin $z^4 - 1$ nollakohdat ovat siten 1, -1, i ja $-\mathrm{i}$, jolloin se voidaan jakaa ensiasteisiin tekijöihin seuraavasti:

$$z^4 - 1 = (z-1)(z+1)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i}).$$

Kahden viimeisen tekijän tulo on reaalikertoiminen toisen asteen polynomi, jolloin päästään reaalikertoimiseen tekijöihin jakoon:

$$z^4 - 1 = (z-1)(z+1)(z^2+1).$$

Esimerkki 2. Polynomin $z^6 + 64$ nollakohdat eli juuren $\sqrt[6]{-64}$ kaikki arvot ovat

$$\begin{gathered} z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}, \quad z_2 = 2\mathrm{i}, \quad z_3 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}, \\ z_4 = -\sqrt{3} - \mathrm{i}, \quad z_5 = -2\mathrm{i}, \quad z_6 = \sqrt{3} - \mathrm{i}. \end{gathered}$$

Tässä on $z_4 = \overline{z}_3$, $z_5 = \overline{z}_2$ ja $z_6 = \overline{z}_1$.

Polynomin jako ensimmäisen asteen tekijöihin on kompleksikertoiminen:

$$z^6 + 64 = (z - z_1)(z - \overline{z}_1)(z - z_2)(z - \overline{z}_2)(z - z_3)(z - \overline{z}_3).$$

Kun tekijät yhdistetään pareittain, saadaan

$$\begin{aligned} (z - z_1)(z - \overline{z}_1) &= z^2 - 2\sqrt{3}z + 4, \\ (z - z_2)(z - \overline{z}_2) &= z^2 + 4, \\ (z - z_3)(z - \overline{z}_3) &= z^2 + 2\sqrt{3}z + 4, \end{aligned}$$

jolloin saadaan jako reaalikertoimisiin toisen asteen tekijöihin:

$$z^6 + 64 = (z^2+4)(z^2+2\sqrt{3}z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4).$$

Linkkejä

Polynomin tekijöihin jako
Polynomin jako reaalisiin tekijöihin

Simo K. Kivelä 11.05.2005