

Värähtelevä jousi

Jousen puristumista ja venymistä voidaan kuvata varsin yksinkertaisella matemaattisella mallilla. Kun jousi poikkeutetaan tasapainoasemastaan, se pyrkii palautumaan tasapainoasemaan *jousivoiman* vaikutuksesta. Tälle ns. *harmoniselle* voimalle pätee

$$F(x) = -kx,$$

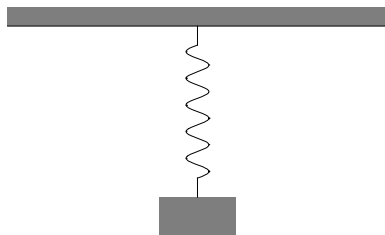
missä x on jousen poikkeama tasapainoasemasta ja k jouselle tyypillinen jousivakio. Jos toisaalta huomioidaan voiman jousisysteemiin aiheuttama kiihtyvyys, saadaan Newtonin lain avulla

$$F(x) = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx,$$

missä m on jouseen kiinnitetty massa. Näin on saatu jousen differentiaaliyhtälö.

Yhtälö pätee myös esimerkiksi katosta jousen varassa ripustetulle kappaleelle. Tulee kuitenkin huomata, että kyseinen malli pätee vain pienille poikkeamille x eikä se lainkaan mallinna poikittaista liikettä tai jousessa syntyvää kiertymää.

Otetaan tarkastelun kohteeksi oheisen kuvion mukainen systeemi, jossa kapale massaltaan m on liitetty kattoon jousella, jonka jousivakio on k . Jousi voi liikkua vain pystysuorassa suunnassa.



Laskujen aluksi on syytä hävittää mahdollisista aiemmista laskuista jääneet muuttujat.

Remove["Global`*"]

Kappaleen pystysuora paikkakoordinaatti x ilmoitetaan poikkeamana lepotilasta, ylöspäin positiivisena ja alaspäin negatiivisena. Systeemin liikeyhtälö on Newtonin lain mukainen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö:

$$yht = m x''[t] + k x[t] == 0$$

$$k x[t] + m x''[t] == 0$$

Systeemiä tarkastellaan siten, että kappale sysätään hetkellä $t = 0$ liikkeelle lepotilasta antamalla sille alkunopeus.

```
alkuehdot = {x[0] == 0, x'[0] == 10}
```

```
{x[0] == 0, x'[0] == 10}
```

Saatu differentiaaliyhtälö ratkaistaan Mathematican `DSolve`-komennolla ja sievennetään.

```
rtk = DSolve[Flatten[{yht, alkuehdot}], x[t], t]
```

```
{ {x[t] ->  $\frac{10 \sqrt{m} \sin\left[\frac{\sqrt{k} t}{\sqrt{m}}\right]}{\sqrt{k}}$  } }
```

```
liike = x[t] /. First[rtk]
```

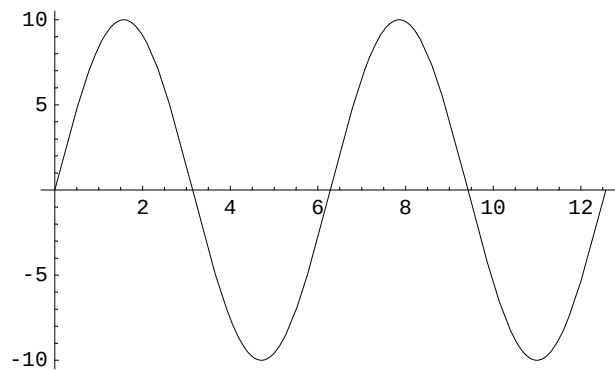
```
 $\frac{10 \sqrt{m} \sin\left[\frac{\sqrt{k} t}{\sqrt{m}}\right]}{\sqrt{k}}$ 
```

Massa joutuu sinimuotoiseen värähtelyliikkeeseen. Piirretään kuvaaja sijoittamalla ensin arvot massalle ja jousivakiolle.

```
rata1 = liike /. {k -> 1, m -> 1}
```

```
10 Sin[t]
```

```
Plot[rata1, {t, 0, 4 Pi}]
```



- Graphics -

Tehdään animaatio värähtelylle. Seuraava koodi määrittelee kappaleen liikkeen animoinnissa tarvittavat työkalut. Kyseessä on Mathematicalla kirjoitettu ohjelmakoodi.

```

kappale[hor_, ver_, lev_, kork_] := {{GrayLevel[0.5],
  Rectangle[{hor - 0.5 * lev, ver - 0.5 * kork}, {hor + 0.5 * lev, ver + 0.5 * kork}]}];
jousi[hor_, ala_, yla_, paa_, jakso_, ampl_] :=
  Module[{jakso}, jakso = (yla - ala - 2 * paa) / jakso;
    kierre = ParametricPlot[{hor + ampl * Sin[2 * Pi * t / jakso], t + ala + paa},
      {t, 0, jakso * jakso}, DisplayFunction -> Identity];
    {Line[{hor, ala}, {hor, ala + paa}], Line[{hor, yla}, {hor, yla - paa}]},
    kierre[[1]]];
kuva[x1_, x2_, x3_, t0_, nro_] := Module[{x10 = x1 /. t -> t0,
  lepo1 = 50.0, a = 20.0, h = 10.0, s = 5.0, ampl = 3.0},
  grafiikka = Graphics[{{GrayLevel[0.5], Rectangle[{-50, 0}, {50, 5}]},
    Line[{-50, 0}, {50, 0}], Text[FontForm[nro, {"Helvetica-Bold", 16}], {70, -5}],
    kappale[0, -lepo1 + x10, a, h], jousi[0, -lepo1 + x10 + h / 2, 0, s, 5, ampl]}];
  Show[grafiikka, AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {{-80, 80}, {-80, 10}}];

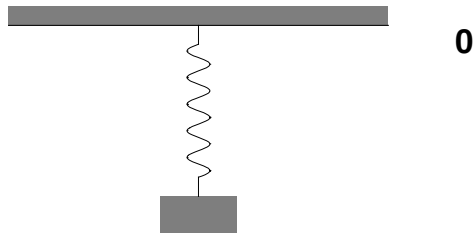
```

General::spell1 :

Possible spelling error: new symbol name "jakso" is similar to existing symbol "jakso". More...

Itse animaatio on lista peräkkäisiä kuvia, joka on ensin laskettava (kestää jonkin aikaa) ja sitten ajettava. Ajaminen tapahtuu napsauttamalla kuvasarjaa oikeassa reunassa yhdistävä hakenen aktiiviseksi (mustaksi) ja painamalla ctrl-y.

```
anim = Table[kuva[rata1, 0, 0, N[k (2 Pi) / 30], ToString[k]], {k, 0, 29}]
```



```

{- Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -,
- Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -,
- Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -,
- Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -, - Graphics -}

```

Tehtävä

Tarkastele erisuuruisten massojen käyttäytymistä jousen varassa. Millä tavalla massan muuttaminen vaikuttaa syntyvään värähtelyyn? Entä jos muutetaan myös alkunopeutta siten, että värähtelyn energia pysyy vakiona?

Linkit

[jousisysteemi](#) (varaht2.nb)

[homogeeninen vakiokertoiminen lineaariyhtälö](#)

JP & SKK 03.05.2001