

Simo K. Kivelä, 7.12.2004

Polynomien sieventäminen

Seuraava tehtävä on syksyn 2000 pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta.

Osoita, että $xy + yz + zx = -1/2$, kun $x + y + z = 0$ ja $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Ratkaisu

Ratkaisu laskentaohjelmalla on hämmentävän yksinkertainen:

```
In[1]:= Simplify[x y + y z + z x, {x + y + z == 0, x^2 + y^2 + z^2 == 1}]
```

```
Out[1]= -1/2
```

Vaihtoehtoinen ratkaisu

Paremmen kuvan ongelman luonteesta saa tekemällä ratkaisun vaiheittain, jolloin myös selviää yleinen periaate. (Simplify-käskey ei kuitenkaan käytä tämänkaltaisia menettelyjä, vaan huomattavasti pidemmälle kehitettyjä ja yleispätevämpiä.)

Määritellään kohdeyhtälö ja voimassaolevat ehdot:

```
In[2]:= kohde = x y + y z + z x == -1 / 2
```

```
Out[2]= x y + x z + y z == -1/2
```

```
In[3]:= ehto1 = x + y + z == 0
```

```
Out[3]= x + y + z == 0
```

```
In[4]:= ehto2 = x^2 + y^2 + z^2 == 1
```

```
Out[4]= x^2 + y^2 + z^2 == 1
```

Eliminoidaan yksi muuttujista jonkin ehtoyhtälön avulla:

```
In[5]:= sij1 = Solve[ehto1, x]
```

```
Out[5]= {{x → -y - z}}
```

```
In[6]:= {uusikohde, uusiehto2} = {kohde, ehto2} /. First[sij1] // ExpandAll
```

```
Out[6]= {-y2 - y z - z2 == -1/2, 2 y2 + 2 y z + 2 z2 == 1}
```

Vastaavalla tavalla eliminoidaan tämän jälkeen toinenkin muuttujista:

```
In[7]:= sij2 = Solve[uusiehto2, y]
```

```
Out[7]= {{y → 1/2 (-z - √(2 - 3 z2))}, {y → 1/2 (-z + √(2 - 3 z2))}}
```

```
In[8]:= uusikohde /. sij2 // ExpandAll
```

```
Out[8]= {True, True}
```

Uusi kohdeyhtälö siis toteutuu, sijoitetaanpa siihen kumpi tahansa saaduista muuttujan y lausekkeista.

Harjoitustehtäviä

1) Voisiko edellä olevassa vaihtoehtoisessa ratkaisussa eliminoinnin tehdä lyhyemmin?

2) Sievennä lauseke $x^2 + y^2 + z^2$, kun $x + y + z = 0$ ja $xy + yz + zx = -1/2$.

3) Sievennä lauseke $x + y + z$, kun $xy + yz + zx = -1/2$ ja $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4) Sievennä lauseke $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, kun $x_1 + x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, ..., $x_{n-1} + x_n = 0$, $x_n + x_1 = 0$. Tarkastele aluksi arvoja $n = 3$ ja $n = 4$. Yleistä tulos tämän jälkeen.