1. Logiikan ja joukko-opin alkeet

1.1. Logiikkaa

1.

Osoita totuusarvotauluja käyttäen, että implikaatio $p \Rightarrow q$ voidaan kirjoittaa muotoon $\neg p \vee q$, ts. että propositio $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ on identtisesti tosi.

VASTAUS:

2.

Todista totuusarvotauluja käyttäen loogiset de Morganin lait: a) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, b) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

VASTAUS:

3.

Todista totuusarvotaulua käyttäen konjunktiivinen distributiivisuus: $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

VASTAUS:

4.

Lausu propositiot $p \wedge q$ ja $p \vee q$ käyttäen yksinomaan negaatiota ja implikaatiota (mutta ei konjunktiota tai disjunktiota).

VASTAUS: $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q)$; $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$.

5.

Looginen NAND-operaatio $p|q$ määritellään totuusarvotaululla

p	q	$p\|q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Osoita: a) $p|p \Leftrightarrow \neg p$, b) $(p|p)|(q|q) \Leftrightarrow p \vee q$, c) $(p|q)|(p|q) \Leftrightarrow p \wedge q$.

VASTAUS:

6.

Mitkä seuraavista reaalilukua x koskevista väittämistä ovat tosia, mitkä eivät?

$$\text{a) } 2x > 3 \Rightarrow x > 2, \quad \text{b) } 3x < 4 \Rightarrow x < 1 \vee 2x < 3, \quad \text{c) } \neg(x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x > 1).$$

VASTAUS: a) Epätosi; b) tosi; c) epätosi.

7.

Olkoot x ja y reaalilukuja, $x > 0$, $y > 0$. Ovatko seuraavat väittämät tosia?

$$\text{a) } \forall x \exists y (y < x), \quad \text{b) } \exists x \forall y (y \geq x).$$

VASTAUS: a) Kyllä; b) ei.

8.

Olkoot x ja ε reaalilukuja. Ovatko seuraavat propositiot tosia:

$$\text{a) } \forall(\varepsilon > 0)\ \exists(x \neq 1)\ (|x-1| < \varepsilon), \quad \text{b) } \exists(x \neq 1)\ \forall(\varepsilon > 0)\ (|x-1| < \varepsilon)\ ?$$

VASTAUS: a) Tosi;   b) epätosi.

9.

Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ = reaaliluvut) jatkuvuus määritellään ehdolla

$$\forall(\varepsilon > 0)\ \forall(x \in \mathbb{R})\ \exists(\delta > 0)\ \forall(y \in \mathbb{R})\ (|y-x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon).$$

Ns. tasainen jatkuvuus taas määritellään ehdolla

$$\forall(\varepsilon > 0)\ \exists(\delta > 0)\ \forall(x \in \mathbb{R})\ \forall(y \in \mathbb{R})\ (|y-x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon).$$

Selosta, mikä ero näillä käsitteillä on.

VASTAUS:

1.2. Matemaattisesta todistamisesta

10.

Osoita totuusarvotauluja käyttäen propositiot

$$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q \quad \text{ja} \quad [p \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p)] \Rightarrow q$$

tautologioiksi. Millaisia matemaattisia todistustapoja nämä säännöt vastaavat?

VASTAUS:

11.

Olkoon n luonnollinen luku. Todista: n on parillinen, jos ja vain jos n^2 on parillinen. Selosta todistuksen looginen rakenne.

VASTAUS:

12.

Tarkoittakoon a jotakuta teekkaria ja olkoon p propositio '$a \in \emptyset$' ($\emptyset$ on tyhjä joukko). Olkoon q propositio 'a on vihreäsilmäinen leijona'. Onko propositio $p \Rightarrow q$ tosi vai epätosi? Jos propositio on tosi, niin seuraako tästä, että kaikki teekkarit ovat leijonia?

VASTAUS:

1.3. Joukko-oppia

13.

Olkoon

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 280/n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10\} =]0, 10[.$$

Määritä a) $A \cap B$, b) $A \cap C$, c) $B \cap C$, d) $A \cup C$, e) $(A \cup B) \cap C$, f) $(B \cup C) \cap A$.

VASTAUS: a) $\{5,7,35\}$; b) $\{1,2,4,5,7,8\}$; c) $\{3,5,7,9\}$;
d) $]0,10] \cup \{14,20,28,35,40,56,70,140,280\}$; e) $\{1,2,3,4,5,7,8,9\}$; f) $\{1,2,4,5,7,8,35\}$.

14.

Todista:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A,\\
&\text{b) } A \subset B \wedge A \subset C \iff A \subset B \cap C,\\
&\text{c) } A \subset C \wedge B \subset C \iff A \cup B \subset C,\\
&\text{d) } A \subset B \iff A \cap C \subset B \cap C \forall C.
\end{aligned}$$

VASTAUS:

15.

Todista joukko-opilliset de Morganin lait. Piirrä kuviot.

VASTAUS:

16.

Olkoot A ja B joukkoja. Todista:

$$(A \cap \complement B) \cup B = (A \cup B) \cap \complement B \iff B = \emptyset.$$

VASTAUS:

17.

Olkoot A, B ja C saman perusjoukon osajoukkoja. Todista identiteetit

$$\begin{aligned}
&\text{a) } (A \cap \complement B) \cap \complement C = A \cap \complement(B \cup C),\\
&\text{b) } A \cap (B \cap \complement C) = (A \cap B) \cap \complement(A \cap C),\\
&\text{c) } (A \cap \complement B) \cup (A \cap \complement C) = A \cap \complement(B \cap C),\\
&\text{d) } (A \cap \complement B) \cap (A \cap \complement C) = A \cap \complement(B \cup C)
\end{aligned}$$

1° tutkimalla mielivaltaisen alkion x kuulumista oikean ja vasemman puolen joukkoihin, 2° soveltamalla joukkoalgebran laskusääntöjä. Piirrä kuviot joukoista.

VASTAUS:

18.

Olkoon $\mathbb{Z}$ kaikkien kokonaislukujen joukko. Todista: a) $\{3n+2 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{3n-7 \mid n \in \mathbb{Z}\}$, b) $\{7n+3 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{7n-32 \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

VASTAUS:

19.

Sievennä joukko-opilliset lausekkeet

$$\text{a) } \bigcup_{k=1}^{\infty} [-1+\tfrac{1}{k}, 1-\tfrac{1}{k}], \quad \text{b) } \bigcap_{k=1}^{\infty}]-\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}[.$$

VASTAUS:

20.

Olkoon

$$A_\varphi = \{\,(x,y) \mid (x-\cos\varphi)^2 + (y-\sin\varphi)^2 < 4\,\}$$

xy-tason joukko. Millainen joukko on

$$\bigcap_{\varphi\in[0,2\pi]} A_\varphi \;?$$

VASTAUS: $\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$.

21.

Olkoot A, B ja C saman perusjoukon joukkoja. Todista, että $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$.

VASTAUS:

22.

Olkoot reaaliluku x relaatiossa R reaalilukuun y, jos $x < 1/y$. Millainen karteesisen tulon $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ osajoukko relaatio R on?

VASTAUS:

23.

Olkoot luonnolliset luvut n ja m relaatiossa P toisiinsa, jos n^2+m^2 on luonnollisen luvun neliö. Piirrä kuva relaatiosta P karteesisen tulon $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ osajoukkona; tarkastele arvoja $n,\ m \le 20$.

VASTAUS:

1.4. Kuvaus

24.

Etsi mahdollisimman laaja lähtöjoukko reaalimuuttujan x reaaliarvoiselle funktiolle

$$f(x) = \sqrt{x(x^2-1)(x^2-4)}.$$

VASTAUS: $\{\,x \mid -2 \le x \le -1 \text{ tai } 0 \le x \le 1 \text{ tai } 2 \le x\,\}$.

25.

Määritä mahdollisimman laaja lähtöjoukko ja vastaava arvojoukko reaalimuuttujan x reaaliarvoiselle funktiolle

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x}}.$$

VASTAUS: Lähtöjoukko $\{\,x \mid x<0 \text{ tai } x\ge 1\,\}$, arvojoukko $\{\,x \mid 0 \le x < 1 \text{ tai } x > 1\,\}$.

26.

Määritellään funktio $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ asettamalla $f(x) = |(x+1)(x-3)|$. Laske välin $[1,4]$ kuva ja välin $[1,4]$ alkukuva.

VASTAUS: $[0,5]$; $\quad [1-2\sqrt{2}, 1-\sqrt{5}] \cup [1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}] \cup [1+\sqrt{5}, 1+2\sqrt{2}]$.

27.

Funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ määritellään ehdoilla

$$\begin{cases} f(n) = n - 10, \quad \text{kun } n > 100, \\ f(n) = f(f(n+11)), \quad \text{kun } 1 \le n \le 100. \end{cases}$$

Millainen funktio on kyseessä?

VASTAUS:

28.

Miten reaalimuuttujan x funktion

$$f(x) = \frac{3x+5}{x-7}$$

(mahdollisimman laajat) lähtö- ja maalijoukko on valittava, jotta funktio olisi bijektio? Määritä käänteisfunktion lauseke. Piirrä sekä funktion että sen käänteisfunktion kuvaaja samaan koordinaatistoon.

VASTAUS:

29.

Reaalimuuttujan reaaliarvoinen funktio f määritellään lausekkeella $f(x) = (1-x^3)/(x^2-1)$. Määritä funktiolle mahdollisimman laaja lähtöjoukko ja tätä vastaava arvojoukko. Piirrä funktion kuvaaja. Rajoita lähtöjoukkoa siten, että funktiolle saadaan käänteisfunktio. Mikä on vastaava arvojoukko? Määritä käänteisfunktion lauseke ja piirrä kuvaaja.

VASTAUS:

30.

Muodosta reaalimuuttujan reaaliarvoisista funktioista $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 + 1$ ja $h(x) = 1 - x^2$ yhdistetyt kuvaukset $h \circ g \circ f$, $g \circ h \circ f$ ja $h \circ f \circ g$.

VASTAUS:

31.

Olkoot $f(x) = x - 2$, $g(x) = 2x + 3$ ja $h(x) = x^2 + x$. Muodosta yhdistetyt funktiot $f \circ g \circ h$ ja $h \circ g \circ f$.

VASTAUS:

32.

Olkoot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reaalimuuttujan reaaliarvoisia funktioita, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $g(x) = x^2 + 1$. Muodosta yhdistetyt funktiot $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$.

VASTAUS:

1.5. Luonnolliset luvut

33.

Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$. Tutki, mitkä Peanon aksioomat A toteuttaa, kun seuraajafunktio s määritellään seuraavasti:
a) $s(1) = 2$, $s(2) = 3$; b) $s(1) = 2$, $s(2) = 3$, $s(3) = 1$; c) $s(1) = 2$, $s(2) = 3$, $s(3) = 2$.

VASTAUS: a) P1, P3, P4, P5; b) P1, P2, P4, P5; c) P1, P2, P3, P5.

34.

Mitkä Peanon aksioomat tyhjä joukko toteuttaa?

VASTAUS:

35.

Todista induktiolla

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{n} k^2 2^k = (n^2-2n+3)\,2^{n+1}-6, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\text{c) } 1\cdot 3 + 3\cdot 5 + \cdots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n}{3}(4n^2+6n-1), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\text{d) } \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}, \quad n = 2,3,\ldots,$$

$$\text{e) } (1+\frac{1}{1})^1(1+\frac{1}{2})^2\ldots(1+\frac{1}{n})^n = \frac{(n+1)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

VASTAUS:

36.

Luvut x_n, $n \in \mathbb{N}$, määritellään siten, että $x_1 = 1$ ja $x_{n+1} = x_n + 2\sqrt{x_n} + 1$, $n = 1,2,3,\ldots$. Osoita induktiota käyttäen, että kaikki luvut x_n ovat kokonaislukuja.

VASTAUS:

37.

Olkoon $x \neq \pm 1$. Todista induktiolla

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{1+x^{2^k}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

VASTAUS:

38.

Laske seuraavat summat ja tulot:

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{5} k\,2^k, \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=0}^{4} jk, \quad \text{c) } \prod_{\substack{0<k<10 \\ k \text{ parillinen}}} 3^k.$$

VASTAUS: a) 258; b) 60; c) $3^{20} = 3\,486\,784\,401$.

39.

Tutki, montako a_{ijk}-termiä on kolminkertaisessa summassa

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} a_{ijk}$$

ja laske summa, kun $a_{ijk} = ijk$.

VASTAUS: 20 termiä, summa $= 350$.

1.6. Lukumäärän laskemisesta

40.

Muodosta joukkojen a) $\{a,b\}$, b) $\{a,b,c\}$ kaikki osajoukot. Montako näitä on?

VASTAUS:

41.

Montako erilaista viiden kortin sarjaa voidaan korttipakasta vetää, kun a) kiinnitetään, b) ei kiinnitetä huomiota korttien järjestykseen?

VASTAUS:

42.

Neljä punaista, kolme vihreää ja kaksi sinistä palloa asetetaan jonoon. Kuinka monta erinäköistä jonoa saadaan, kun samanväriset pallot ovat keskenään identtisiä?

VASTAUS:

43.

Kuinka monta erilaista henkilötunnusta on (Suomessa) periaatteessa olemassa? Tunnuksen muoto on ppkkvv-nnnr, missä on aluksi syntymäpäivä (ppkkvv), sitten juokseva numero (nnn) ja lopuksi tarkistusmerkki (r). Tarkistusmerkki määräytyy jakolaskun ppkkvvnnn/31 jakojäännöksestä. Rajoitutaan tarkastelemaan sadan vuoden jaksoa ja oletetaan, että karkausvuosia tähän jaksoon mahtuu 25.

VASTAUS:

44.

Olkoon joukon A alkioiden lukumäärä $\#A = m < \infty$. Kuinka monta erilaista p ($p \leq m$) alkion osa*joukkoa* joukon A alkioista voidaan muodostaa? Entä osa*jonoa*? (Joukon alkiot ovat aina keskenään eri suuria, ts. jokainen alkio mainitaan vain kerran; jonossa sama alkio voi esiintyä useita kertoja.)

VASTAUS:

45.

Olkoon joukon A alkioiden lukumäärä $\#A = m < \infty$ ja joukon B alkioiden lukumäärä $\#B = n < \infty$. Osoita, että erilaisia funktioita $A \to B$ on n^m kappaletta.

VASTAUS:

46.

Olkoot A ja B äärellisiä joukkoja, $\#A = m$, $\#B = n$. Olkoon $S(m,n)$ surjektioiden $A \to B$ lukumäärä. Osoita, että tälle pätee

$$\begin{aligned} &S(m,1) = 1, \\ &S(m,n) = n^m - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S(m,k), \quad n = 2,3,\ldots. \end{aligned}$$

VASTAUS:

47.

Laske edellisessä tehtävässä esitettyjen kaavojen avulla surjektioiden määrä $S(m,n)$, kun $1 \leq m \leq 4$, $1 \leq n \leq 4$. Mieti, voidaanko tulos saada jollakin muulla tavalla, kun a) $m = n$, b) $m < n$.

VASTAUS:

48.

Teekkari saattoi 1970-luvun puolivälissä suorittaa jopa kuusi matematiikan kurssia — kutsuttakoon näitä seuraavassa nimillä A, B, C, D, E, F — joissa oli yhteisiä osia. Kullakin kurssilla oli suorituspistearvonsa (vastaa nykyisiä opintoviikkoja) ja kurssien yhteislaajuuden selvittämiseksi määriteltiin myös kurssien kaksittaisille, kolmittaisille jne. leikkauksille suorituspistearvot. Nämä olivat seuraavat:

A: 3.5, B: 2, C: 3, D: 3.5, E: 7.5, F: 5.5,
A∩C: 1.5, A∩D: 1, B∩D: 0.5, C∩D: 1,
A∩C∩D: 1.

Muiden kombinaatioiden leikkaukset olivat tyhjiä. Montako suorituspistettä sai teekkari, joka oli suorittanut kaikki kuusi kurssia?

VASTAUS:

49.

Laitumella on lauma nautakarjaa. Laumassa on 83 täysin ruskeata eläintä, 77 sarvipäätä, 36 sukupuoleltaan sonnia, 22 ruskeata sarvipäätä, 15 ruskeata sonnia, 25 sarvipäistä sonnia ja 7 ruskeata sarvipäistä sonnia. Muunlaisia eläimiä ei laumassa ole. Kuinka monta eläintä laumassa on kaikkiaan?

VASTAUS: 141.

50.

Osoita, että rationaalilukuja on yhtä paljon kuin luonnollisia lukuja, ts. että rationaalilukujen ja luonnollisten lukujen joukot ovat yhtä mahtavia.

VASTAUS:

51.

Osoita, että avoimella välillä $]0,1[$ on reaalilukuja yhtä paljon kuin koko reaalilukujoukossa, ts. että väli $]0,1[$ ja reaalilukujoukko $\mathbb{R}$ ovat yhtä mahtavia.

VASTAUS: