

### 3. Kompleksiluvut

#### 3.1. Kompleksitaso

## 81.

Todista kompleksilukujen yhteen- ja kertolaskun (lukuparien avulla annettuihin) määritelmiin perustuen osittelulaki:  $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ .

VASTAUS:

## 82.

Todista kompleksilukujen yhteen- ja kertolaskun (lukuparien avulla annettuihin) määritelmiin perustuen ns. tulonollasääntö:  $z_1z_2 = 0 \implies z_1 = 0 \vee z_2 = 0$ .

VASTAUS:

## 83.

Saata kompleksiluvut

$$\text{a) } (1+i)(1-i)^5, \quad \text{b) } \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$$

muotoon  $x + iy$ . Laske lukujen moduuli ja argumentti.

VASTAUS:

## 84.

Olkoon  $u = \cos 0.5 + i \sin 0.5$  ja  $z_0 = 1 + i$ . Laske kompleksiluvut  $w_k = u^k z_0$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , ja piirrä pisteiden sijainti kompleksitasossa. Miten pisteet muuttuvat, jos valitaan  $u = 0.9(\cos 0.5 + i \sin 0.5)$ ? Millainen vaikutus luvun  $u$  potensseilla kertomisella on?

VASTAUS:

## 85.

Todista, että kaikilla  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  pätee

$$(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2) \geq |1 + z_1z_2|^2.$$

VASTAUS:

## 86.

Olkoon  $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = a$ . Millä arvoilla  $a$  pätee  $|z - i| < |z - 3|$ ? Piirrä kuvio.

VASTAUS:  $a < 2$ .

## 87.

Tutki, mitkä kompleksitason pisteet toteuttavat seuraavat ehdot:

$$\begin{aligned} \text{a) } |z-1| + |z+i| = 4, \quad \text{b) } |z+1| - |z-i| = 1, \quad \text{c) } |z+i| = 2|z-i|, \\ \text{d) } \arg \frac{z-1}{z-i} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{e) } \arg \frac{z}{3-z} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Piirrä kuviot.

VASTAUS: a) Ellipsi  $15x^2 + 15y^2 - 2xy - 16x + 16y - 48 = 0$ ; b) hyperbelin toinen haara  $y = \frac{4x+3}{8x+4}$ ,  $x > -\frac{1}{2}$ ;  
 c) ympyrä  $3x^2 + 3y^2 - 10y + 3 = 0$ ; d) ympyränkaari  $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ ,  $x + y > 1$ ; e) ympyränkaari  $x^2 + y^2 - 3x + 3y = 0$ ,  $y > 0$ .

## 88.

Piirrä se kompleksitason alue, jossa

$$\text{a) } \begin{cases} 1 < |z - 1 - i| < 2 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} |z - 1| + |z - i| < 2 \\ 0 < \arg(z + 1 + i) < \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

VASTAUS: a) Alueessa on kaksi osaa; edellisen reuna muodostuu janasta  $AB$ , kaaresta  $BC$  ja janasta  $CA$ , jälkimmäisen kaaresta  $CD$ , janasta  $DE$ , kaaresta  $EF$  ja janasta  $FC$ ; pisteet ovat  $A = 0$ ,  $B = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}(1+i)$ ,  $C = i$ ,  $D = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}(1+i)$ ,  $E = (\sqrt{2}+1)(1+i)$ ,  $F = (\sqrt{3}+1)i$ ; b) puolet ellipsin sisäosasta:  $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 4y < 0$ ,  $y < x$ .

## 89.

Määritä  $\sup\{\arg z \mid |z - 3 - 4i| \leq 3, \arg z \in [0, 2\pi[ \}$ . Onko kyseessä myös maksimi?

VASTAUS:  $\frac{\pi}{2}$ .

## 90.

Etsi kahden desimaalin tarkkuudella  $\sup S$  ja  $\inf S$ , kun

$$S = \{ \arg z \mid |z + 5i - 2| < 3 \}.$$

Tässä  $\arg z$  valitaan väliltä  $[0, 2\pi[$ . Piirrä kuvio.

VASTAUS:

## 91.

Minkä käyrän piirtää a)  $z^2$ , kun  $z$  piirtää käyrän  $\arg(z - i) = \frac{\pi}{4}$ ; b)  $z\bar{z} + 2z + \bar{z} + 1$ , kun  $z$  piirtää ympyrän  $|z| = 1$ ; c)  $\bar{z} + 1 + i$ , kun  $z$  piirtää käyrän  $|z + i| = 1$ ? Piirrä kuviot.

VASTAUS: Merkitään  $u = \operatorname{Re} f(z)$ ,  $v = \operatorname{Im} f(z)$ . a) Paraabelin kaari  $v = \frac{1}{2}(u^2 - 1)$ ,  $u < -1$ ; b) ellipsi  $(u - 2)^2 + 9v^2 = 9$ ; c) ympyrä  $(u - 1)^2 + (v - 2)^2 = 1$ .

## 92.

Millä kompleksitason käyrällä  $\frac{z-i}{z+i}$  on puhtaasti imaginaarinen?

VASTAUS: Ympyrällä  $|z| = 1$ ,  $z \neq -i$ .

### 3.2. Kompleksilukujen potenssit ja juuret

## 93.

Laske seuraavien kompleksilukujen moduuli ja argumentti saattamatta lukuja muotoon  $x + iy$ :

$$\text{a) } (1+i)^6, \quad \text{b) } (1-i\sqrt{3})(1-i)^2, \quad \text{c) } \frac{2-2i}{(\sqrt{3}+i)^2}.$$

VASTAUS: a)  $8, \frac{3\pi}{2}$ ; b)  $4, -\frac{5\pi}{6}$ ; c)  $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{7\pi}{12}$ .

## 94.

Kehitä de Moivren kaavan avulla a)  $\sin 5\varphi$  polynomiksi, jonka muuttujana on  $\sin \varphi$ , b)  $\tan 3\varphi$  rationaalilausekkeeksi muuttujasta  $\tan \varphi$ .

VASTAUS: a)  $5 \sin \varphi - 20 \sin^3 \varphi + 16 \sin^5 \varphi$ ; b)  $\frac{3 \tan \varphi - \tan^3 \varphi}{1 - 3 \tan^2 \varphi}$ .

## 95.

Lausu a)  $\cos^4 \varphi$  funktioiden  $\cos 2\varphi$  ja  $\cos 4\varphi$  avulla, b)  $\sin^5 \varphi$  funktioiden  $\sin \varphi$ ,  $\sin 3\varphi$  ja  $\sin 5\varphi$  avulla.

VASTAUS: a)  $\frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi)$ ; b)  $\frac{1}{16}(10 \sin \varphi - 5 \sin 3\varphi + \sin 5\varphi)$ .

## 96.

Laske  $(\cos t + i \sin t)^5$  a) de Moivren kaavan avulla, b) binomikaavan avulla. Minkälaiset trigonometrian kaavat tästä saadaan?

VASTAUS:

## 97.

Laske geometrinen summa

$$\sum_{k=0}^n (\cos t + i \sin t)^k.$$

Millaiset trigonometrisia funktioita koskevat kaavat saadaan tuloksen reaali- ja imaginaariosasta? Piirrä summafunktion reaali- ja imaginaariosien kuvaajat tapauksissa  $n = 5, 25, 100$ .

VASTAUS:

## 98.

Määritä seuraavien juurien kaikki arvot:

$$\text{a) } \sqrt[4]{-4}, \quad \text{b) } \sqrt[6]{-64}, \quad \text{c) } \sqrt[3]{i-1}, \quad \text{d) } \sqrt{3+4i}, \quad \text{e) } \sqrt{-7+24i}.$$

VASTAUS: a)  $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$ ; b)  $\sqrt{3}+i, 2i, -\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}-i, -2i, \sqrt{3}-i$ ;  
c)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}[(-\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}-1)i], \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}[(\sqrt{3}-1) + (-\sqrt{3}-1)i]$ ;  
d)  $\pm(2+i)$ ; e)  $\pm(3+4i)$ .

## 99.

Määritä viiden desimaalin tarkkuudella kaikki ne kompleksiluvut, joiden viides potenssi = 1. Piirrä kuvio lukujen sijainnista kompleksitasossa.

VASTAUS:

## 100.

Juuren  $\sqrt[6]{2+3i}$  likiarvo on  $1.2217 + 0.2019i$ . Piirrä kuva, jossa juuren kaikki arvot on sijoitettu kompleksitasoon (laskematta juurten likiarvoja).

VASTAUS:

## 101.

Olkoon  $z = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ . Tutki, millä kokonaisluvulla  $n$  pätee  $z^n = z$ .

VASTAUS:

## 102.

Olkoon  $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ . Laske a)  $(a\omega + b\omega^2)(a\omega^2 + b\omega)$ , b)  $(a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$ .

VASTAUS: a)  $a^2 + b^2 - ab$ ; b)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ .

## 103.

Olkoon  $f(t) = \cos t + i \sin t$  reaalimuuttujan  $t$  kompleksiarvoinen funktio ja  $g(z) = \operatorname{Im} \sqrt{z^2}$  kompleksimuuttujan  $z$  reaaliarvoinen funktio. Piirrä reaalimuuttujan reaaliarvoisen funktion  $g \circ f$  kuvaaja. Valitse riittävän pitkä tarkasteluväli. Vertaa kuvaajaa tapaukseen  $g(z) = \operatorname{Im} z$ . Miksi kuvaaja näyttää sellaiselta kuin näyttää?

VASTAUS:

## 104.

Laske numeerisesti jollakin tietokoneohjelmalla  $(-1)^\pi$ . Yritä selittää saamasi tulos. Mikä mahtaa olla tarkka arvo?

VASTAUS:

## 105.

Laske numeerisesti jollakin tietokoneohjelmalla  $i^i$ . Yritä selittää saamasi tulos.

VASTAUS:

### 3.3. Polynomeista

## 106.

Ratkaise seuraavat yhtälöt käyttäen toisen asteen yhtälön ratkaisukaavoja; saata juuret muotoon  $x + iy$ .

$$\begin{aligned} \text{a) } z^2 + 2iz - i - 1 &= 0, & \text{b) } z^2 - 4iz - 4 + i &= 0, & \text{c) } z^2 - (3 + 5i)z + (-4 + 7i) &= 0, \\ \text{d) } z^4 - 2z^2 + 4 &= 0, & \text{e) } z^4 + (1 - 2i\sqrt{3})z^2 - 3 - i\sqrt{3} &= 0. \end{aligned}$$

VASTAUS: a)  $\frac{1}{\sqrt{2}} - (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})i$ ,  $-\frac{1}{\sqrt{2}} - (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})i$ ; b)  $-\frac{1}{\sqrt{2}} + (2 + \frac{1}{\sqrt{2}})i$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}} + (2 - \frac{1}{\sqrt{2}})i$ ; c) ?; d)  $\pm(\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})$ ,  $\pm(\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})$ ; e)  $\pm \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1 + i)$ ,  $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}i)$ .

## 107.

Määritä  $\alpha \in \mathbb{C}$  siten, että  $z = 1 + i$  on yhtälön  $\bar{z}^3 = \alpha + i$  juuri. Esitä muut juuret napakoordinaattimuodossa.

VASTAUS:  $\alpha = -2 - 3i$ ; muut juuret  $\sqrt{2}(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12})$ ,  $\sqrt{2}(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12})$ .

## 108.

Ratkaise toisen asteen yhtälön ratkaisukaavoilla yhtälö  $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - i) = 0$ .

VASTAUS:

## 109.

Jaa polynomit a)  $x^4 - 1$ , b)  $x^4 + 1$ , c)  $x^6 + 1$  korkeintaan toista astetta oleviin reaalikertoimisiin tekijöihin.

VASTAUS: a)  $(x+1)(x-1)(x^2+1)$ ; b)  $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$ ; c)  $(x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)$ .