5. Geometriset avaruudet

5.1. Pisteavaruus, vektoriavaruus ja koordinaattiavaruus

169.

Olkoon $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ tason E^2 kanta ja olkoon $\mathbf{u} = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$, $\mathbf{w} = -\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2$. Määritä vektoreiden $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}$ ja $\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}$ koordinaattivektorit. Piirrä kuvio vektoreista tapauksessa a) $\mathbf{b}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{j}$, b) $\mathbf{b}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$.

VASTAUS: $\begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix}^T$, $\begin{pmatrix} 0 & 7 \end{pmatrix}^T$.

170.

Määritä α siten, että vektori $\mathbf{a} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + 10 & 10 \end{pmatrix}^T$ on vektorin $\mathbf{b} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T$ suuntainen. Ovatko vektorit saman- vai vastakkaissuuntaiset?

VASTAUS: $\alpha = -15$.

171.

Osoita, että kolmiulotteisen avaruuden E^3 vektorit $\mathbf{b}_1 = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b}_2 = -\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ muodostavat kannan ja laske vektorin $6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 37\mathbf{k}$ koordinaatit tässä kannassa.

VASTAUS: $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}^T$.

172.

Olkoon $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ avaruuden E^3 kanta ja olkoot

$$\mathbf{u} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{v} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{w} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} -12 & 2 & 23 \end{pmatrix}^T$$

kolme tässä kannassa esitettyä vektoria. Osoita, että $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ ovat saman tason suuntaisia ja lausu $\mathbf{u}$ vektoreiden $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ lineaariyhdistelynä.

VASTAUS: $\mathbf{u} = \frac{4}{3}\mathbf{v} + \frac{1}{3}\mathbf{w}$.

173.

Tutki, millä ehdolla seuraavat tason E^2 kannassa $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ annetut vektoriparit ovat lineaarisesti riippuvia:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -\tau\beta & \tau\alpha \end{pmatrix}^T, \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} \sigma\alpha + \tau\beta & \tau\alpha + \sigma\beta \end{pmatrix}^T.$$

VASTAUS: a) $\alpha = \beta = 0$ tai $\tau = 0$; b) $|\alpha| = |\beta|$ tai $\tau = 0$.

174.

Olkoon annettuna kolme vektoria eräässä avaruuden E^3 kannassa:

$$\mathbf{u} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{v} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{w} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \end{pmatrix}^T.$$

Määritä vektoreiden $\mathbf{u} + 7\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$, $-\mathbf{u} + 5\mathbf{v} - \mathbf{w}$ $7\mathbf{u} - \mathbf{v} + 10\mathbf{w}$ koordinaattivektorit samassa kannassa. Ovatko viimeksi mainitut vektorit lineaarisesti riippumattomia?

VASTAUS:

175.

Tutki seuraavien vektorisysteemien lineaarista riippuvuutta, kun kantana on $\mathbf{b}_1 = \mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $\mathbf{b}_2 = 7\mathbf{i}+11\mathbf{j}+13\mathbf{k}$, $\mathbf{b}_3 = 17\mathbf{i}+19\mathbf{j}+23\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } \{\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix}0 & 3 & 4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix}8 & -3 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\},\\
&\text{b) } \{\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix}4 & 2 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix}3 & 5 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\},\\
&\text{c) } \{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix}5 & 0 & -5\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\},\\
&\text{d) } \{\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\}.
\end{aligned}$$

VASTAUS: a) On, b) ei, c) on, d) ei.

176.

Olkoot vektorit $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ ja $\vec{OC}$ lineaarisesti riippumattomia. Todista, että myös vektorit $\vec{AB}$ ja $\vec{AC}$ ovat (keskenään) lineaarisesti riippumattomia.

VASTAUS:

177.

Kolmion ABC keskiö olkoon M. Koordinaatiston origona olkoon M ja kantavektoreina $\vec{MA}$ ja $\vec{MB}$. Laske kolmion kärkipisteiden ja sivujen keskipisteiden koordinaatit.

VASTAUS: Kärkipisteet: $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,-1)$; sivujen keskipisteet: $(-\frac{1}{2},0)$, $(0,-\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

178.

Kolmiossa ABC piste O puolittaa sivun AB, piste E_1 jakaa sivun BC suhteessa $1:2$ ja piste E_2 sivun CA suhteessa $1:3$. Määritä kolmion kärkipisteiden koordinaatit siinä koordinaatistossa, jonka origona on piste O ja kantavektoreina $\vec{OE_1}$ ja $\vec{OE_2}$.

VASTAUS: $(-\frac{9}{7},\frac{4}{7})$, $(\frac{9}{7},-\frac{4}{7})$, $(\frac{3}{7},\frac{8}{7})$.

179.

Annettu tetraedri määrää avaruuden koordinaatiston siten, että yksi kärki on origona ja muut määrittävät kantavektoreiden loppupisteet. Määritä särmien keskipisteiden, tahkojen keskiöiden ja tetraedrin keskiön koordinaatit.

VASTAUS: Särmien keskipisteet: $(\frac{1}{2},0,0)$, $(0,\frac{1}{2},0)$, $(0,0,\frac{1}{2})$, $(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$;
tahkojen keskiöt: $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0)$; tetraedrin keskiö: $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

180.

Olkoot vektorit $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ erisuuntaisia, ts. $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$. Määritä vektori $\mathbf{c}$ siten, että $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ ja $\mathbf{c}+\mathbf{a}$ muodostavat kolmion.

VASTAUS: $\mathbf{c} = \mathbf{o}$ tai $\mathbf{c} = -\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

181.

Olkoon piste M kolmion ABC keskiö (keskijanojen leikkauspiste). Osoita, että $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC} = \mathbf{o}$.

VASTAUS:

182.

Olkoot pisteet M ja N kolmioiden ABC ja DEF keskiöt. Osoita, että $\vec{AD}+\vec{BE}+\vec{CF} = 3\vec{MN}$.

VASTAUS:

183.

Kolmion ABC sivut BC, CA ja AB jakautuvat pisteissä A', B' ja C' suhteessa $m:n$. Todista, että kolmioiden ABC ja $A'B'C'$ keskiöt yhtyvät.

VASTAUS:

184.

Kolmiossa ABC piste D jakaa sivun BC suhteessa $p:q$ ja piste E sivun AB suhteessa $r:s$. Missä suhteessa janojen AD ja CE leikkauspiste X jakaa janan AD?

VASTAUS: $(pr+qr):(qs)$.

185.

Kolmion ABC kärjestä A sivulle BC piirretty jana AD puolittaa kulman BAC. Lausu vektori $\vec{AD}$ vektorien $\mathbf{u}=\vec{AB}$ ja $\mathbf{v}=\vec{AC}$ avulla, kun tiedetään, että $|\vec{AB}|=3$ ja $|\vec{AC}|=2$.

VASTAUS: $\frac{2}{5}\mathbf{u}+\frac{3}{5}\mathbf{v}$.

186.

Kolmion ABC sivuja merkitään $\mathbf{u}=\vec{AB}$, $\mathbf{v}=\vec{AC}$. Kärjestä A piirretyn kulmanpuolittajan ja kärjestä C piirretyn keskijanan leikkauspiste olkoon K. Määritä $|\mathbf{u}|$, kun tiedetään, että $|\mathbf{v}|=1$ ja $\vec{AK}=\frac{1}{5}\mathbf{u}+\frac{3}{5}\mathbf{v}$.

VASTAUS: $|\mathbf{u}|=3$.

187.

Suunnikkaassa $ABCD$ kärki A yhdistetään sivun DC keskipisteeseen P ja kärki B sivun AD keskipisteeseen R. Yhdysjanat leikatkoot pisteessä X. Lausu vektori $\vec{AX}$ vektoreiden $\mathbf{u}=\vec{AB}$ ja $\mathbf{v}=\vec{AD}$ avulla.

VASTAUS: $\frac{1}{5}\mathbf{u}+\frac{2}{5}\mathbf{v}$.

188.

Olkoot E, F, G ja H suunnikkaan $ABCD$ sivujen AB, BC, CD ja DA keskipisteet. Piste X olkoon janojen BG ja EF leikkauspiste. Lausu vektori $\vec{HX}$ vektorien $\mathbf{u}=\vec{AB}$ ja $\mathbf{v}=\vec{AD}$ avulla.

VASTAUS: $\frac{5}{6}\mathbf{u}-\frac{1}{6}\mathbf{v}$.

189.

Puolisuunnikkaassa $ABCD$, missä $\vec{AB}\upuparrows\vec{DC}$ ja $|\vec{AB}|:|\vec{DC}|=m>1$, merkitään $\mathbf{u}=\vec{AD}$ ja $\mathbf{v}=\vec{BC}$. Lausu näiden avulla vektorit $\vec{AB}$ ja $\vec{AM}$, missä M on puolisuunnikkaan lävistäjien leikkauspiste.

VASTAUS: $\vec{AB}=\frac{m}{m-1}(\mathbf{u}-\mathbf{v}),\quad \vec{AM}=\frac{m}{m^2-1}(m\mathbf{u}-\mathbf{v})$.

190.

Osoita vektoreita käyttäen, että tetraedrin kahden vastakkaisen särmän keskipisteiden yhdysjanoilla on yksi yhteinen piste.

VASTAUS:

191.

Tetraedrin keskijana on kärjen ja vastakkaisen sivutahkon keskiön yhdysjana. Piste X jakakoon tetraedrin erään keskijanan kärjestä lähdettäessä suhteessa $3:1$. Osoita, että X yhtyy edellisessä tehtävässä mainittujen yhdysjanojen leikkauspisteeseen. Miten tetraedrin neljä keskijanaa suhtautuvat toisiinsa?

VASTAUS:

5.2. Käyräviivaisia koordinaatistoja

192.

Pisteen P suorakulmaiset avaruuskoordinaatit ovat $(-2,3,-1)$. Laske lieriö- ja pallokoordinaatit (tarkat arvot ja likiarvot).

VASTAUS:

193.

Laske kolmiulotteisen avaruuden (kannassa $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ annettujen) pisteiden $(1,1,1)$ ja $(-1,-3,-5)$ pallokoordinaatit (likiarvot).

VASTAUS: $r \approx 1.7321$, $\varphi \approx 0.7854$, $\vartheta \approx 0.9553$; $\quad r \approx 5.9161$, $\varphi \approx 4.3906$, $\vartheta \approx 2.5777$.

194.

Origokeskisellä pallopinnalla sijaitseva käyrä toteuttaa pallokoordinaattiyhtälön $\varphi = \vartheta$. Millainen käyrä on kysymyksessä?

VASTAUS:

195.

Lieriön akselina on z-akseli. Lieriöpinnalla sijaitsee käyrä, jonka yhtälö lieriökoordinaateissa on $z = \varphi$. Millainen käyrä on kyseessä?

VASTAUS:

5.3. Skalaaritulo

196.

Vektoreille $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ pätee $|\mathbf{a}+3\mathbf{b}| = 16$, $|\mathbf{a}-3\mathbf{b}| = 2\sqrt{58}$. Laske vektoreiden sisätulo $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

VASTAUS:

197.

Vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ välinen kulma on 120° ja $|\mathbf{a}| = 3|\mathbf{b}|$. Määritä skalaari λ siten, että $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ja $\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

VASTAUS: $\lambda = -15$.

198.

Suorakulmaisessa kolmiossa ABC on suoran kulman kärjestä lähtevä korkeusjana AD. Sivujen AB ja AC pituudet ovat 5 ja 12. Laske skalaaritulot $\vec{AB}\cdot\vec{DC}$, $\quad \vec{BD}\cdot\vec{CA}$, $\quad \vec{AC}\cdot\vec{CD}$.

VASTAUS: $\vec{AB}\cdot\vec{DC}=\vec{BD}\cdot\vec{CA}=-\frac{3600}{169}$, $\quad \vec{AC}\cdot\vec{CD}=-\frac{20736}{169}$.

199.

Säännöllisen tetraedrin kärjestä lähtevät särmävektorit ovat $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$. Laske vektoreiden $\mathbf{a}+\mathbf{b}+2\mathbf{c}$ ja $2\mathbf{a}-\mathbf{b}$ välisen kulman kosini.

VASTAUS: $\frac{5}{2\sqrt{33}}$.

200.

Avaruuden E^3 kantavektoreista tiedetään seuraavaa: $|\mathbf{b}_1|=|\mathbf{b}_2|=1$, $|\mathbf{b}_3|=2$, $\mathbf{b}_1\perp\mathbf{b}_2$, $\angle(\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_1)=\angle(\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_2)=60^\circ$. Määritä α siten, että vektoreille $\mathbf{u}=2\mathbf{b}_1+\alpha\mathbf{b}_3$ ja $\mathbf{v}=\mathbf{b}_1+3\mathbf{b}_2$ on voimassa $|\operatorname{comp}(\mathbf{u},\mathbf{v})|=|\operatorname{comp}(\mathbf{v},\mathbf{u})|$.

VASTAUS: $\alpha=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{7})$, $\quad -\frac{1}{2}$.

201.

Koordinaatiston $\{O,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$ kantavektorit muodostavat pareittain 60° kulman ja niiden pituudet ovat $|\mathbf{b}_1|=3$, $|\mathbf{b}_2|=2$, $|\mathbf{b}_3|=1$. Muodosta vektoreiden määräämän tetraedrin pisteestä O lähtevän mediaanivektorin vektorikomponentti vektorille $\mathbf{b}_1$.

VASTAUS: $\frac{1}{2}\mathbf{b}_1$.

202.

Osoita skalaarituloa käyttäen, että kolmion korkeusjanat kulkevat saman pisteen kautta.

VASTAUS:

203.

Olkoon $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$ vakiovektori ja olkoon $\mathbf{r}$ pisteen P paikkavektori. Millaisen joukon muodostavat ne pisteet P, joille pätee a) $(\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}=0$, b) $(\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{r}=0$? Tarkastele erikseen taso- ja avaruustapausta.

VASTAUS:

204.

Kolmiulotteisessa avaruudessa pisteen P ja origon yhdysjanan pituus on 5. Se muodostaa positiivisen x-akselin kanssa kulman $\alpha=32^\circ$ ja positiivisen y-akselin kanssa kulman $\beta=73^\circ$. Laske pisteen P koordinaatit.

VASTAUS:

205.

Olkoon $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$. Laske kummankin vektorin skalaari- ja vektorikomponentti toisen vektorin suunnalle.

VASTAUS: $\operatorname{comp}(\mathbf{a},\mathbf{b})=-\frac{7}{\sqrt{11}}$, $\quad \operatorname{comp}(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{b}^\circ=-\frac{7}{11}(\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k})$, $\quad \operatorname{comp}(\mathbf{b},\mathbf{a})=-\frac{7}{\sqrt{29}}$,
$\operatorname{comp}(\mathbf{b},\mathbf{a})\mathbf{a}^\circ=-\frac{7}{29}(3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k})$.

206.

Määritä vektori, joka muodostaa yhtä suuret kulmat vektoreiden $\mathbf{k}$, $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ja $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ kanssa.

VASTAUS: $\alpha[(\sqrt{3}-\sqrt{2})\mathbf{i}+(\sqrt{2}-1)\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\quad \alpha\in\mathbb{R}$.

5.4. Vektoritulo

207.

Määritä yksikkövektori, joka on kohtisuorassa vektoreita $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ja $\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ vastaan.

VASTAUS: $\pm\frac{1}{\sqrt{138}}(8\mathbf{i}-7\mathbf{j}-5\mathbf{k})$.

208.

Muodosta ortonormeerattu oikeakätinen avaruuden E^3 kanta $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$, jonka vektori $\mathbf{b}_1$ on vektorin $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ suuntainen ja vektori $\mathbf{b}_2$ on vaakasuora, ts. xy-tason suuntainen. Määräytyykö kanta yksikäsitteisesti näistä ehdoista?

VASTAUS:

209.

Jaa vektori $\mathbf{u}=11\mathbf{i}-7\mathbf{j}-11\mathbf{k}$ kolmeen komponenttiin, joista yksi on vektorin $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ suuntainen, toinen vektorin $\mathbf{b}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ suuntainen ja kolmas kohtisuorassa vektoreita $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ vastaan. Miten pitkä on vektorin kohtisuora projektio tasolla, joka on vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ suuntainen?

VASTAUS: $6(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})-\frac{13}{3}(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k})+\frac{1}{3}(10\mathbf{i}+7\mathbf{j}+\mathbf{k})$; $\quad\frac{\sqrt{2469}}{3}$.

210.

Osoita: $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{o} \implies \mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$.

VASTAUS:

211.

Kheopsin pyramidin alkuperäinen korkeus oli 147 m ja neliönmuotoisen pohjan sivun pituus 230 m. Sijoita pyramidi sopivasti koordinaatistoon, laske pyramidin kahden vierekkäisen sivun normaalivektorit ja näiden avulla sivujen välinen (diedri)kulma.

VASTAUS:

212.

Sijoita säännöllinen oktaedri sopivaan asentoon koordinaatistoon siten, että yksi kärki on origossa. Laske tästä kärjestä alkavien särmien vektoriesitykset ja näiden avulla tässä kärjessä kohtaavien sivutahkojen normaalivektorit. Laske näiden avulla sivutahkojen välinen diedrikulma.

VASTAUS: $\pi-\overline{\text{arc}}\cos\frac{1}{3}\approx 1.9106$.

213.

Helsingistä lennetään lyhintä tietä Tokioon. Miten pitkä on matka ja mihin ilmansuuntaan Helsingistä on lähdettävä? Maapallon säde on 6370 km ja kaupunkien maantieteelliset koordinaatit seuraavat:

Helsinki:	60° N ,	25° E ;
Tokio:	36° N ,	140° E .

(Muodosta aluksi paikkakuntien paikkavektorit maantieteellisten pallokoordinaattien avulla ja käytä sitten skalaari- ja vektorituloja.)

VASTAUS: Etäisyys n. 7809 km, suunta 51.18° pohjoisesta itäänpäin.

214.

Laske vektoreiden $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ristitulo. Laske myös vektoria $\mathbf{a}$ vastaava ristitulomatriisi $A^{\times}$ ja em. ristitulo matriisitulona $A^{\times}b$.

VASTAUS:

5.5. Vektorialgebraa

215.

Olkoot $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{x}$ avaruuden E^3 vektoreita. Johda vektorikolmitulon $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{x})$ kehityskaava muodostamalla vektoreita $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ vastaavat ristitulomatriisit $A^{\times}$, $B^{\times}$ ja laskemalla $A^{\times}B^{\times}$. Tulkitse $A^{\times}B^{\times}x$, missä $\mathbf{x} \mathrel{\widehat{=}} x$, kehityskaavan oikeaksi puoleksi.

VASTAUS:

216.

Laske $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ sekä kahdella ristitulon muodostamisella että vektorikolmitulon kehityskaavalla, kun $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

VASTAUS: $20\mathbf{i} - 68\mathbf{j} - 41\mathbf{k}$.

217.

Laske $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, kun $\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{j} = 0$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ja $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -4$.

VASTAUS: $12\mathbf{i} - 8\mathbf{k}$.

218.

Tutki, millä ehdoilla $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

VASTAUS: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$ tai ($\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ ja $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$).

219.

Olkoot $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ avaruuden E^3 vektoreita. Todista:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b},\ \mathbf{b} \times \mathbf{c},\ \mathbf{c} \times \mathbf{a}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]^2.$$

VASTAUS:

220.

Vektorit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Sievennä lauseke

$$[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}).$$

Millä ehdolla lauseke on $= \mathbf{o}$?

VASTAUS: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}][(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$; $\quad = \mathbf{o}$, jos $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ ja $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$.

221.

Osoita: $|\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|^2 = |\mathbf{a}|^4 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$.

VASTAUS:

222.

Määritä vektorin $(\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}))))))$ pituus, kun tiedetään, että $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=1$ ja $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-2$.

VASTAUS: $243\sqrt{5}$.

223.

Määritä vektori $\mathbf{r}$, joka toteuttaa yhtälöparin

$$\begin{cases}\mathbf{r}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{r})=\mathbf{k}\\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{j}=0\end{cases}.$$

VASTAUS: $\mathbf{r}=\pm\mathbf{i}$.

224.

Laske sen kolmion ala, jonka kahtena sivuna ovat vektorit $\mathbf{i}+5\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ ja $3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

VASTAUS: $\frac{\sqrt{395}}{2}$.

225.

Tetraedrin kärjet ovat $(-1,-2,4)$, $(5,-1,0)$, $(2,-3,6)$, $(1,-1,1)$. Laske tetraedrin tilavuus.

VASTAUS: $\frac{1}{6}$.

226.

Tutki, muodostavatko a) tason E^2 vektorit $\{2\mathbf{i}-\mathbf{j},\ -\mathbf{i}-\mathbf{j}\}$, b) avaruuden E^3 vektorit $\{\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k},\ 3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k},\ \mathbf{i}+\mathbf{j}-5\mathbf{k}\}$ kannan. Onko (myönteisessä tapauksessa) kanta positiivisesti vai negatiivisesti suunnistettu?

VASTAUS:

227.

Tason E^2 koordinaatistossa $\{O,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\}$ on annettuna pisteet $A \,\widehat{=}\, \begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $B \,\widehat{=}\, \begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Osoita, että kolmion *OAB* pinta-ala on

$$\frac{1}{2}|\mathbf{b}_1||\mathbf{b}_2||\sin\angle(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)|\left|\det\begin{pmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{pmatrix}\right|.$$

VASTAUS:

228.

Avaruuden E^3 kolmen pisteen paikkavektorit ovat $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$. Esitä menettely, jolla voidaan määrittää pisteiden kautta kulkevan ympyrän keskipisteen paikkavektori.

VASTAUS:

229.

Kolmiulotteisen avaruuden ympyrä kulkee pisteiden $(1,2,3)$, $(2,-5,3)$ ja $(-1,3,-6)$ kautta. Määritä ympyrän keskipiste, säde ja ympyrän tason normaalin suunta.

VASTAUS:

5.6. Koordinaatiston vaihto

230.

Tason E^2 kahden kannan välillä vallitsee yhteys

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1' &= \mathbf{b}_1 + 9\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_2' &= 6\mathbf{b}_1 + 8\mathbf{b}_2 \end{cases}.$$

Muodosta koordinaatistonmuunnoskaavat pilkutettujen koordinaattien suhteen ratkaistuina.

VASTAUS: $\xi_1' = \frac{1}{23}(-4\xi_1 + 3\xi_2)$, $\xi_2' = \frac{1}{46}(9\xi_1 - \xi_2)$.

231.

Tasossa E^2 siirrytään vanhasta koordinaatistosta $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ uuteen koordinaatistoon $\{O', \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, missä $O' \hat{=} 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{j}$. Esitä koordinaatistonmuunnos sekä uusien että vanhojen koordinaattien suhteen ratkaistuna.

VASTAUS:

232.

Avaruuden E^3 vanha kanta muodostuu vektoreista

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$$

ja uusi kanta vektoreista

$$\mathbf{b}_1' = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{b}_2' = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{b}_3' = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{k}.$$

Origojen paikkavektorit ovat $\mathbf{b}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ja $\mathbf{b}_0' = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Muodosta yhtälöryhmät, joista kannanvaihtomatriisi ja origonsiirtovektori voidaan ratkaista.

VASTAUS:

233.

Muodosta edellisen tehtävän kannanvaihtokaavat ja muunna vanhan kannan koordinaatit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ uuteen kantaan ja takaisin.

VASTAUS:

234.

Avaruuden E^3 kahden kannan välillä vallitsee yhteys

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1' &= 2\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 7\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_2' &= \mathbf{b}_2 + 9\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_3' &= 6\mathbf{b}_1 + 8\mathbf{b}_2 \end{cases}.$$

Määritä luvut α ja β siten, että vektorin $\alpha\mathbf{b}_1' + \beta\mathbf{b}_2' + \mathbf{b}_3'$ koordinaatit kannassa $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ ovat keskenään yhtä suuret.

VASTAUS: $\alpha = \frac{24}{5}$, $\quad \beta = -2$.

235.

Avaruuteen sijoitetaan suuntaissärmiö, jonka yhtenä kärkenä on piste $P \hat{=} (1, 2, 3)$ ja jonka tästä kärjestä lähtevät särmät ovat

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k}.$$

Laske särmiön sivutahkojen keskipisteiden koordinaatit särmäkoordinaatistossa $\{P, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$. Muodosta koordinaatistomuunnos, jolla nämä koordinaatit saadaan lasketuiksi $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ -koordinaatistossa ja laske koordinaatit.

VASTAUS:

236.

Tason koordinaatistossa $\{O, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ on koordinaatiston $\{O', \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2\}$ ξ'_1-akselin yhtälö $2\xi_1 + \xi_2 = 2$ ja ξ'_2-akselin yhtälö $\xi_1 - \xi_2 + 3 = 0$. Eräällä pisteellä on koordinaatit $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 2$ ja $\xi'_1 = -2$, $\xi'_2 = 2$. Millä pisteellä on samat koordinaatit ($\xi_1 = \xi'_1$, $\xi_2 = \xi'_2$) kummassakin koordinaatistossa?

VASTAUS: $(1, 5)$.

237.

Tason kahden koordinaatiston väliset muunnoskaavat ovat

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \xi'_1 & = & \alpha\xi_1 & + & 2\xi_2 & - & 1 \\ \xi'_2 & = & -\xi_1 & + & \beta\xi_2 & + & 2 \end{array} \right. .$$

Yhtälöt $\xi_1 + 3\xi_2 + 1 = 0$ ja $2\xi'_1 - \xi'_2 + 5 = 0$ esittävät samaa suoraa. Määritä α ja β.

VASTAUS: $\alpha = 0, \quad \beta = 1$.

238.

Kolmiossa ABC piste D puolittaa sivun BC, piste E sivun AC ja piste M on kolmion keskiö. Tarkastellaan koordinaatistoja $\{A, \vec{AM}, \vec{AC}\}$ ja $\{B, \vec{BD}, \vec{BE}\}$. Erään suoran yhtälö edellisessä koordinaatistossa on $2\xi_1 - 2\xi_2 = 1$. Määritä sen yhtälö jälkimmäisessä koordinaatistossa. Piirrä kuvio.

VASTAUS: $5\xi'_1 + 9\xi'_2 = 7$.

239.

Suunnikas $ABCD$ ($\vec{AB} \upuparrows \vec{DC}$), jonka keskipiste on M, määrää kaksi tason koordinaatistoa: $\{A, \vec{AM}, \vec{AD}\}$ ja $\{B, \vec{BC}, \vec{BM}\}$. Muodosta koordinaatistonmuunnoskaavat. Minkä pisteen koordinaatit säilyvät muuttumattomina siirryttäessä koordinaatistosta toiseen? Piirrä kuvio.

VASTAUS: $\xi_1 = -\xi'_2 + 2$, $\xi_2 = \xi'_1 + \xi'_2 - 1$; $\quad (1, 1)$.

240.

Osoita, että vektorit $\mathbf{b}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}'_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b}'_2 = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ovat saman tason suuntaiset. Osoita, että sekä $\{O, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\}$ että $\{O, \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_1 \times \mathbf{b}'_2\}$ voidaan valita avaruuden E^3 koordinaatistoiksi; tässä on $O \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{o}$ on koordinaatistojen yhteinen origo. Määritä koordinaattimuunnoskaavojen matriisi T.

VASTAUS: $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

241.

Tason E^2 koordinaatisto $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ on siirretty ja kierretty uuteen asentoon $\{O', \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$; x'-akselin yhtälö pilkuttomissa koordinaateissa on $x + 3y - 6 = 0$, y'-akselin vastaavasti $3x - y - 4 = 0$. Esitä koordinaattimuunnoskaavat kumpaankin suuntaan, kun lisäksi tiedetään, että $\mathbf{i}'$- ja $\mathbf{j}$-vektoreiden välinen kulma on terävä.

VASTAUS: $x' = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x + y + 4)$, $y' = \frac{1}{\sqrt{10}}(-x - 3y + 6)$, $\quad x = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x' - y') + \frac{9}{5}$, $y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y') + \frac{7}{5}$.

242.

Koordinaatistoista $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ja $\{O, \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ tiedetään seuraavaa: 1) Molemmat ovat ortonormeerattuja ja oikeakätisiä. 2) $\mathbf{i}'$ ja $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ ovat samansuuntaiset. 3) $\mathbf{k}'$ on xy-tason suuntainen siten, että kulma $\angle(\mathbf{k}', \mathbf{i})$ on terävä. Lausu koordinaatistonmuunnoskaava pilkuttomien koordinaattien suhteen ratkaistuna.

VASTAUS: $S = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & -2\sqrt{5} & 6\sqrt{5} \\ 10 & -4\sqrt{5} & -3\sqrt{5} \\ 10 & 5\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = o.$

243.

Totea, että matriisi

$$T = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & -5 & 10 \\ -11 & -2 & 10 \\ -2 & -14 & -5 \end{pmatrix}$$

on ortogonaalinen. Määritä pisteet, joiden koordinaatit säilyvät ennallaan koordinaatistomuunnoksessa $x' = Tx$.

VASTAUS: $\alpha \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

5.7. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ geometriaa

244.

Osoita, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad b_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

muodostavat avaruuden kannan.

VASTAUS:

245.

Olkoon $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Osoita:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

VASTAUS:

246.

Todista: $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, jos ja vain jos $y = o$ tai $x = \alpha y$, missä $\alpha \geq 0$.

VASTAUS:

247.

Todista Pythagoraan lause avaruudessa $\mathbb{R}^n$: Jos $x \perp y$, niin $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

VASTAUS:

248.

Todista suunnikaslause avaruudessa $\mathbb{R}^n$: $\|x-y\|^2+\|x+y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2$. Miksi lausetta sanotaan suunnikaslauseeksi?

VASTAUS:

249.

Todista: $\|x\| = \|y\| \iff x+y \perp x-y$.

VASTAUS:

250.

Laske avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektoreiden $x = \begin{pmatrix}3 & -2 & 0 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ja $y = \begin{pmatrix}2 & 6 & 9 & 3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ välisen kulman kosini. Mikä on kulman suuruus?

VASTAUS: $-\frac{9}{2\sqrt{455}}$; 1.783.

251.

Laske avaruuden $\mathbb{R}^5$ pisteiden $P \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix}3 & -2 & 4 & -6 & 5\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ja $Q \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 7 & -2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ välinen etäisyys.

VASTAUS: $2\sqrt{73}$.

252.

Valitse jokin avaruuden $\mathbb{R}^5$ yksikkövektori x ja muodosta tämän avulla matriisi $H = I - 2xx^{\mathrm{T}}$. Tutki, ovatko matriisin H pystyvektorit ortonormeeratut. Laske vektorin x ja matriisin H pystyvektoreiden välisten kulmien kosinit ja itse kulmat.

VASTAUS:

253.

Vektorit $Vb_1 = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{i}+2\mathbf{j}$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{i}$ muodostavat avaruuden E^3 kannan. Avaruus E^3 varustetaan sisätulolla siten, että tämä kanta on ortonormeerattu, ts. sisätulolla on lauseke $(\mathbf{u} \mid \mathbf{v}) = \xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3$, missä luvut ξ_1,ξ_2,ξ_3 ja η_1,η_2,η_3 ovat vektoreiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ koordinaatit em. kannassa. Esitä sisätulon lauseke kantaan $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ liittyvien koordinaattien avulla. Totea, että lauseke voidaan kirjoittaa muotoon $x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ay$, missä A on sopiva matriisi. Laske vektoreiden $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ täten määritelty sisätulo.

VASTAUS:

254.

Olkoon $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineaarikuvaus. Osoita:

$$(F(x) \mid F(y)) = \frac{1}{2}\left(\|F(x+y)\|^2 - \|F(x)\|^2 - \|F(y)\|^2\right).$$

Päättele tämän avulla, että jos lineaarikuvaus säilyttää vektorien pituudet (ts. $\|F(x)\| = \|x\|\ \forall x$), niin se säilyttää myös vektorien väliset kulmat (ts. $\angle(F(x),F(y)) = \angle(x,y)\ \forall x,y$).

VASTAUS: