7. Matriisin ominaisarvot

7.1. Ominaisarvon ja ominaisvektorin käsite; laskeminen

323.

Olkoon λ matriisin A ominaisarvo ja olkoon $x \neq o$ vastaava ominaisvektori. Osoita, että matriisilla A^p on ominaisarvona λ^p ja vastaava ominaisvektori on x ($p \in \mathbb{N}$).

VASTAUS: Induktiotodistus.

324.

Neliömatriisi A olkoon säännöllinen (ts. käänteismatriisi A^{-1} on olemassa) ja $\lambda \neq 0$ olkoon sen ominaisarvo, $x \neq o$ vastaava ominaisvektori. Todista: käänteismatriisilla on ominaisarvo $1/\lambda$ ja vastaava ominaisvektori on x.

VASTAUS:

325.

Osoita muodostamatta polynomiyhtälöä ominaisarvoille, että matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

ominaisvektorit ovat $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ja $x_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Mitkä ovat vastaavat ominaisarvot?

VASTAUS:

326.

Osoita oikeaksi tai vääräksi: Jos λ_1 ja λ_2 ovat matriisin A ominaisarvoja ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), niin $\lambda_1 + \lambda_2$ on matriisin A ominaisarvo.

VASTAUS:

327.

Matriisilla

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

on ominaisvektoreina $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ja $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Olkoon $x = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Laske $A^{11}x$.

VASTAUS:

328.

Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit. Voidaanko ominaisvektorit valita ortonormeeratuiksi?

VASTAUS: Ominaisarvot -1 ja 3; vastaavat ominaisvektorit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ja $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$; voidaan.

329.

Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit.

VASTAUS:

330.

Tutki matriisin

$$\begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoja ja -vektoreita parametrin α eri arvoilla. Mitä voidaan sanoa niiden reaalisuudesta ja kompleksisuudesta? Montako lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria voidaan löytää?

VASTAUS:

331.

Määritä matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t \\ t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot parametrin t funktioina ja piirrä näiden kuvaajat.

VASTAUS:

332.

Määritä matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix}$$

ominaisvektoreiden välinen kulma parametrin t funktiona. Mitä tämä kertoo ominaisvektoreiden lineaarisesta riippumattomuudesta?

VASTAUS:

333.

Olkoon λ matriisin

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & \beta \\ 4 & \alpha & \beta & 2 \\ 4 & \beta & \alpha & 2 \\ \beta & 3 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$$

ominaisarvo. Millä lukuja α, β, λ koskevalla ehdolla matriisilla on ominaisvektorina
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T$?

VASTAUS:

7.2. Diagonalisointi; symmetriset matriisit

334.

Määritä matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit. Onko matriisi diagonalisoituva? Ilmoita myönteisessä tapauksessa vastaava diagonaalimatriisi ja similariteettimuunnosmatriisi.

VASTAUS:

335.

Määritä seuraavan matriisin ominaisarvot ja -vektorit sekä tutki sen diagonalisoituvuutta:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

VASTAUS:

336.

Laske matriisien

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. Muodosta ominaisvektoreista ortonormeerattu kanta.

VASTAUS: Ominaisarvot ja vastaavat ominaisvektorit:
a) $2, -1, \alpha\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix}\beta+\gamma & \beta & \gamma\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$;
b) $6, 0, \alpha\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix}\beta+\gamma & -2\beta & -2\gamma\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$;
c) $1, 1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}, \alpha\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \beta\begin{pmatrix}2 & \sqrt{5} & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \gamma\begin{pmatrix}-2 & \sqrt{5} & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

337.

Laske matriisien

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. Muodosta ortogonaalinen similaritettimuunnosmatriisi T (so. matriisi, jolle pätee $T^{-1} = T^{\mathrm{T}}$). Kirjoita vastaava lävistäjämatriisi Λ ja totea, että $T^{-1}AT = \Lambda$.

VASTAUS:

338.

Tutki similariteettimuunnosta seuraavien matriisien tapauksessa:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ovatko matriisit diagonalisoituvia? Totea myönteisessä tapauksessa yhtälön $T^{-1}AT = \Lambda$ voimassaolo numeerisella laskulla.

VASTAUS:

7.3. Neliömuodot

339.

Kirjoita neliömuodon

$$\text{a) } Q(x,y) = 16x^2 + 9y^2 + 24xy, \quad \text{b) } Q(x,y) = xy, \quad \text{c) } Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$$

esitysmatriisi, hae sen ominaisarvot ja luokittele neliömuoto.

VASTAUS: a) $\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$; $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 25$; positiivisesti semidefiniitti; b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}$; indefiniitti; c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2},\ \lambda_3 = 2$; positiivisesti definiitti.

340.

Muodosta neliömuodon $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ esitysmatriisi. Määritä tämän ominaisarvot ja ortonormeeratut ominaisvektorit. Millaisten lävistäjämatriisen kanssa esitysmatriisi on similaarinen? Luokittele neliömuoto.

VASTAUS:

341.

Luokittele seuraavat neliömuodot:

$$\text{a) } Q(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2,$$
$$\text{b) } Q(x,y,z) = (x+3y-z)^2 + (x-y-z)^2 + (x+y-z)^2.$$

VASTAUS:

342.

Tutki, missä xy-tason pisteissä seuraavat neliömuodot saavat arvon 0:

$$\text{a) } Q(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 2xy,$$
$$\text{b) } Q(x,y) = x^2 + 4y^2 + 4xy,$$
$$\text{c) } Q(x,y) = 3x^2 + y^2 + 4xy.$$

VASTAUS:

343.

Etsi jokin origon kautta kulkeva suora, jolla neliömuoto $Q(x,y,z) = xy + yz + zx$ saa arvon 0. Onko tällaisia suoria useampia? Minkä tyyppinen neliömuoto on kyseessä?

VASTAUS: