9. Toisen asteen käyrät ja pinnat

9.1. Käyrän ja pinnan käsitteet

371.

Piirrä seuraavat käyrät:

$$\text{a)}\ \begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \sin 5t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi], \qquad \text{b)}\ \begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{t} \\ y = \dfrac{\sin t}{t} \end{cases}, \quad t \geq 0.$$

VASTAUS:

372.

Lausu napakoordinaattikäyrät a) $r\cos(\varphi - \frac{\pi}{3}) = 2$, b) $r = 2a\cos\varphi$, c) $r = 2a\sin\varphi$ xy-koordinaatistossa.

VASTAUS: a) Suora $x + y\sqrt{3} = 4$; b) ympyrä $(x-a)^2 + y^2 = a^2$; c) ympyrä $x^2 + (y-a)^2 = a^2$.

373.

Piirrä seuraavat pinnat:

$$\text{a)}\ \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v/4 \end{cases}, \quad u \in [0, 2],\ v \in [0, 8\pi], \qquad \text{b)}\ \begin{cases} x = \sin u \\ y = \sin 2u \cos v \\ z = \sin 2u \sin v \end{cases}, \quad u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ v \in [0, 2\pi].$$

VASTAUS:

9.2. Kartioleikkaukset

374.

Suoran ympyräkartion muodostajasuoran ja kartion pohjaympyrän välinen kulma on 45°. Kartiota leikataan tasolla, jonka kaltevuuskulma on α, $0 < \alpha < 45^\circ$. Laske leikkauskuviona syntyvän ellipsin eksentrisyys (so. polttopisteiden etäisyys jaettuna ison akselin pituudella) kaltevuuskulman α funktiona.

VASTAUS: $\sqrt{2}\sin\alpha$.

375.

Onko edellisen tehtävän lasku pätevä, jos $45^\circ < \alpha \leq 90^\circ$, ts. jos kyseessä on hyperbelitapaus? Mikä on lausekkeen raja-arvo, kun $\alpha \to 45^\circ$?

VASTAUS:

376.

Suoran ympyräkartion muodostajasuoran ja kartion pohjaympyrän välinen kulma on β. Mikä on suurin eksentrisyyden arvo, mikä tason ja kartion leikkauskäyrällä voi olla?

VASTAUS:

377.

Suoran ympyräkartion muodostajasuoran ja kartion pohjaympyrän välinen kulma on 60°. Kartiota leikataan tasolla, jonka kaltevuuskulma pohjaympyrään nähden on 30°, jolloin leikkauskäyrä on ellipsi. Laske Dandelinin pallojen säteet.

VASTAUS:

9.3. Yhtälöt pääakselikoordinaatistossa

378.

Piirrä ellipsin $4x^2 + 9y^2 = 36$ kuva käyttämällä parametriesitystä, jossa parametrina on eksentrinen anomalia.

VASTAUS:

379.

Avaruudessa sijaitsevan ellipsin keskipiste on $\mathbf{r}_0 \mathrel{\widehat{=}} (1,2,3)$ ja sen puoliakselit määräytyvät vektoreista $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Mieti, miksi ellipsille voidaan käyttää parametriesitystä $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}\cos t + \mathbf{b}\sin t$. Laske tämän perusteella ellipsin kehältä 100 pistettä. Piirrä ellipsin ortogonaaliprojektiot koordinaattitasoille.

VASTAUS:

380.

Johda sen ellipsin yhtälö, jonka polttoisteet ovat $(0,1)$ ja $(0,-4)$ sekä eksentrisyys $= \frac{1}{2}$.

VASTAUS: $16x^2 + 12y^2 + 36y = 273$.

381.

Johda sen ellipsin yhtälö, jonka polttopisteet ovat $(-1,1)$ ja $(3,3)$ ja joka sivuaa x-akselia. Määritä ellipsin eksentrisyys.

VASTAUS: $4x^2 + 7y^2 - 4xy - 24y = 0; \quad e = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

382.

Jana liikkuu siten, että sen toinen päätepiste liukuu x-akselia, toinen y-akselia pitkin. Johda sen käyrän yhtälö, jonka janalla oleva kiinteä piste piirtää. Mikä käyrä on kyseessä?

VASTAUS:

383.

Pisteen O kautta kulkevien suorien s_1 ja s_2 välinen kulma olkoon α. Pisteen P etäisyys suorasta s_1 olkoon d_1 ja etäisyys suorasta s_2 olkoon d_2. Osoita, että ne pisteet P, joille pätee $d_1^2 + d_2^2 = 1$, muodostavat ellipsin.

VASTAUS:

384.

Olkoot d_1 ja d_2 ellipsin polttopisteiden etäisyydet ellipsin tangentista. Osoita, että tulo $d_1 d_2$ on vakio, so. tangentista riippumaton.

VASTAUS: Vakioarvo $= b^2$.

385.

Olkoon tarkasteltavana kaksi O-keskistä ellipsiä, c_1 ja c_2:

$$\frac{x^2}{a_k^2}+\frac{y^2}{b_k^2}=1, \quad k=1,2.$$

Olkoon piste P_1 ellipsillä c_1 ja olkoon s_1 tähän pisteeseen asetettu ellipsin normaali; vastaavasti P_2 ja s_2 ellipsin c_2 suhteen. Mikä ehto täytyy lukujen a_1, b_1, a_2 ja b_2 täyttää, jotta $\vec{OP_1} \parallel s_2 \implies \vec{OP_2} \parallel s_1$?

VASTAUS: $a_1a_2=b_1b_2$.

386.

Johda sen hyperbelin yhtälö, jonka asymptootteina ovat suorat $x\pm 2y=0$ ja eräänä tangenttina suora $x-y+1=0$.

VASTAUS: $3x^2-12y^2=4$.

387.

Olkoon $a>0$. Pisteet $A \mathrel{\widehat{=}} (-a,0)$ ja $B \mathrel{\widehat{=}} (2a,0)$ kärkinä on piirretty kolmio ABP siten, että $\angle PAB=\frac{1}{2}\angle PBA$. Minkä käyrän pisteet P muodostavat?

VASTAUS: $3x^2-y^2=3a^2$, $x\geq a$.

388.

Johda hyperbelille $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ parametriesitys

$$x=\frac{a}{2}(t+\frac{1}{t}), \quad y=\frac{b}{2}(t-\frac{1}{t})$$

leikkaamalla käyrää laskevan asymptootin suuntaisilla suorilla.

VASTAUS: Ota laskevaksi suoraksi $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=t$.

389.

Osoita, että seuraava ellipsi ja hyperbeli ovat *konfokaaliset*, ts. niillä on yhteiset polttopisteet:

$$\frac{x^2}{a^2+s}+\frac{y^2}{b^2+s}=1, \quad \frac{x^2}{a^2-t}-\frac{y^2}{t-b^2}=1, \quad b^2<t<a^2,\ s>-b^2.$$

Näytä, että käyrät leikkaavat kohtisuorasti. Piirrä käyräparvien kuvaajia, kun parvien parametreina ovat s ja t.

VASTAUS:

390.

Todista, että hyperbelin asymptoottien ja tangentin rajoittaman kolmion ala on vakio.

VASTAUS: Vakioarvo on ab.

391.

Määritä ympyrä, joka kulkee paraabelin $y^2=2ax$ polttopisteen kautta ja sivuaa käyrää kahdessa pisteessä.

VASTAUS: $(x-\frac{5}{2}a)^2+y^2=4a^2$.

392.

Johda sen paraabelin yhtälö, jonka polttopiste on $(-1,0)$ ja joka sivuaa y-akselia pisteessä $(0,2)$.

VASTAUS: $4x^2 + y^2 + 4xy + 12x - 4y + 4 = 0.$

393.

Johda sen paraabelin yhtälö, joka kulkee pisteiden $(1,0)$ ja $(2,0)$ kautta ja jolla on akselina suora $y = x$.

VASTAUS: $x^2 + y^2 - 2xy - 3x - 3y + 2 = 0.$

394.

Johda niiden paraabelien yhtälöt, joiden akselina on suora $x = 2y$ ja huippuna origo. Määritä näistä se, joka sivuaa suoraa $y = 1$.

VASTAUS: $x^2 + 4y^2 - 4xy - 40tx - 20ty = 0;\quad x^2 + 4y^2 - 4xy + 10x + 5y = 0.$

9.4. Yhtälöt napakoordinaateissa

395.

Millaista käyrää esittää napakoordinaattiyhtälö a) $r(4 - 3\cos\varphi) = 10$, b) $r(3 - 4\cos\varphi) = 10$? Määritä eksentrisyys ja puoliakselit. Piirrä kuvio.

VASTAUS: a) Ellipsi; $e = \frac{3}{4},\ a = \frac{40}{7},\ b = \frac{10}{\sqrt{7}}$; b) hyperbeli; $e = \frac{4}{3},\ a = \frac{30}{7},\ b = \frac{10}{\sqrt{7}}$.

396.

Piirrä kuvat napakoordinaattikäyristä

$$r = \frac{1}{1 - e\cos\varphi},$$

kun $e = 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1, 1.25, 1.5$. Mieti sopiva väli muuttujalle φ. Mitä käyriä nämä ovat?

VASTAUS:

397.

Määritä ellipsin $r(1 - e\cos\varphi) = p$ keskipiste, polttopisteet ja puoliakselit. Esitä käyrän yhtälö xy-koordinaatistossa.

VASTAUS:

398.

Määritä hyperbelin $r(\pm 1 - e\cos\varphi) = p$ keskipiste, polttopisteet ja puoliakselit. Esitä käyrän yhtälö xy-koordinaatistossa.

VASTAUS:

399.

Ellipsin polttopisteet ovat $(0,0)$ ja $(2,2)$; sen ison akselin puolikas on $a = 2$. Määritä pikku akselin puolikas b ja eksentrisyys e sekä ellipsin yhtälö napakoordinaateissa. Piirrä kuvio.

VASTAUS: $b = \sqrt{2}$, $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $r = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \cos(\varphi - \frac{\pi}{4})}$.

400.

Määritä käyrän $a^2(x+1)^2 + a^2(y-1)^2 = (3x - y)^2$ laatu kaikilla parametrin a arvoilla.

VASTAUS: $a = 0$, suora; $0 < |a| < \sqrt{10}$, hyperbeli; $a = \pm\sqrt{10}$, paraabeli; $|a| > \sqrt{10}$, ellipsi.

401.

Hyperbelin polttopisteeseen asetetun akselia vastaan kohtisuoran jänteen pituus on 4 ja hyperbelin eksentrisyys on 5. Määritä puoliakselien pituudet.

VASTAUS: $a = \frac{1}{12}$, $b = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

402.

Kartioleikkaukseen piirretään samasta polttopisteestä kaksi vastakkaissuuntaista polttosädettä. Osoita, että niiden pituuksien käänteisarvojen summa on vakio.

VASTAUS:

403.

Osoita, että jos paraabelille piirretään polttopisteestä neljä polttosädettä, joiden väliset kulmat ovat 90°, niin polttosäteiden pituuksien tulo saa pienimmän arvonsa $4p^4$, kun paraabelin akseli puolittaa toisen polttosäteiden välisistä ristikulmapareista.

VASTAUS:

404.

Ellipsin polttopisteet ovat $(2,2)$ ja $(-2,1)$ sekä johtosuora $4x + y = 14$. Määritä ellipsin eksentrisyys ja johda yhtälö xy-koordinaatistossa.

VASTAUS: $e = \frac{\sqrt{17}}{5}$; $9x^2 + 24y^2 - 8xy + 12x - 72y + 4 = 0$.

405.

Johda sen hyperbelin yhtälö, jonka toinen polttopiste on $(1,1)$ ja johtosuorat (kummallekin haaralle) $x + y = \pm 1$.

VASTAUS: $2xy = 1$.

9.5. Toisen asteen pintojen päätyypit

406.

Tutki, miten yksivaippaisen hyperboloidin $x^2 + y^2 - z^2 = 25$ tangenttitaso $3x + 4y = 25$ leikkaa pintaa.

VASTAUS: Pitkin kahta suoraa.

407.

Osoita, että yksivaippainen hyperboloidi $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ja taso $x + y - z = 1$ leikkaavat toisensa pitkin kahta suoraa. Missä pisteessä nämä suorat leikkaavat toisensa? Mitkä ovat niiden suuntavektorit? Laske suorien välinen kulma.

VASTAUS:

408.

Osoita laskemalla, että kartio

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

on hyperboloidien

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$$

asymptoottikartio.

VASTAUS:

409.

Tutki, millainen on xy-tason ja hyperbolisen paraboloidin

$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=2z$$

leikkauskäyrä.

VASTAUS: Kaksi suoraa: $y=\pm\frac{q}{p}x$.

410.

Koordinaatistoa kierretään 45° z-akselin ympäri. Millaisen muodon hyperbolisen paraboloidin $x^2-y^2=2z$ yhtälö tällöin saa?

VASTAUS:

9.6. Yleinen toisen asteen käyrä

411.

Yhtälö $x^{\mathrm{T}}Ax+2b^{\mathrm{T}}x+\omega=0$, missä

$$A=\begin{pmatrix}5&2\\2&8\end{pmatrix},\quad b=-\begin{pmatrix}16\\28\end{pmatrix},\quad \omega=80,\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},$$

esittää erästä x_1x_2-tason käyrää. Saata käyrän yhtälö muotoon $f(x_1,x_2)=0$ ja piirrä käyrä. Miten matriisin A ominaisvektorit suhtautuvat käyrään?

VASTAUS:

412.

Olkoon

$$A=\begin{pmatrix}3&4\\4&9\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix},\quad \omega=12.$$

Tutki toisen asteen käyrää $x^{\mathrm{T}}Ax+2b^{\mathrm{T}}x+\omega=0$ ja osoita, että se on ellipsi. Määritä eksentrisyys.

VASTAUS: $e=\sqrt{\frac{10}{11}}$.

413.

Tutki ja piirrä seuraavat toisen asteen käyrät:

a) $5x^2+5y^2+6xy-16x-16y-16=0$,

b) $8y^2+6xy-12x-26y+11=0$,

c) $x^2-2y^2+xy+x+2y=0$,

d) $4x^2+y^2-4xy+4x-2y+2=0$.

VASTAUS: a) Ellipsi; b) hyperbeli; c) kaksi leikkaavaa suoraa; d) ei mitään.

414.

Osoita, että seuraavat käyrät ovat paraabeleja:

$$\text{a) } x^2+y^2+2xy-6x-2y+9=0,$$
$$\text{b) } x^2+y^2-2xy-12x-20y+36=0,$$
$$\text{c) } 16x^2+9y^2+24xy-170x+310y-465=0.$$

Määritä niiden akseli, huippu, huipputangentti, polttopiste ja johtosuora. Piirrä käyrät.

VASTAUS: a) $x+y-2=0,\ (\frac{9}{4},-\frac{1}{4}),\ x-y-\frac{5}{2}=0,\ (\frac{5}{2},-\frac{1}{2}),\ x-y-2=0$; b) $x-y+2=0,\ (0,2),\ x+y-2=0,\ (2,4),\ x+y+2=0$; c) $4x+3y+5=0,\ (-\frac{41}{25},\frac{13}{25}),\ 3x-4y+7=0,\ (\frac{23}{50},-\frac{114}{50}),\ 3x-4y+\frac{49}{2}=0$.

415.

Määritä a ja b siten, että yhtälö $2x^2+2y^2+axy-7x+by+3=0$ esittää kahta yhdensuuntaista suoraa.

VASTAUS: $a=4,\ b=-7$ tai $a=-4,\ b=7$.

416.

Määritä käyrän $x^2+y^2+2axy+2x+2ay+b=0$ laatu kaikilla parametrien a ja b arvoilla.

VASTAUS: $|a|<1,\ b<1$, ellipsi; $|a|<1,\ b>1$, ei mitään; $|a|<1,\ b=1$, piste; $|a|>1,\ b\neq 1$, hyperbeli; $|a|>1,\ b=1$, kaksi leikkaavaa suoraa; $|a|=1,\ b<1$, kaksi yhdensuuntaista suoraa; $|a|=1,\ b>1$, ei mitään; $|a|=1,\ b=1$, yksi suora.

417.

Osoita, että kolmiparametrisen (parametreina a, d, k) käyräparven $k^2x^2+y^2-2kxy-2(a^2+1)(x+ky)+d=0$ kaikki käyrät ovat paraabeleja ja että niiden akselit kulkevat saman pisteen kautta.

VASTAUS:

418.

Kolmiota rajoittavat suorat $x=0$, $y=mx$, $y=k(x-a)$. Laske kolmion korkeusjanojen leikkauspiste ja osoita, että se sijaitsee eräällä hyperbelillä, kun k muuttuu (ja m ja a ovat vakioita). Määritä hyperbelin keskipiste ja asymptootit. Piirrä kuvio.

VASTAUS: Hyperbeli $my^2+xy=max$, keskipiste $(-2m^2a,ma)$, asymptootit $y=ma$, $x+my+ma^2=0$.

419.

Osoita, että jos käyrän $x^{\mathrm{T}}Ax+2b^{\mathrm{T}}x+\omega=0$ pisteessä $P_0 \mathrel{\widehat{=}} x_0$ toteutuu yhtälö $Ax_0+b=o$, niin käyrän yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $(x-x_0)^{\mathrm{T}}A(x-x_0)=0$. Millainen käyrä ja millainen piste voi tulla kysymykseen?

VASTAUS: Käyrä on kaksi leikkavaa suoraa ja piste on leikkauspiste; käyrä on suora ja piste on mikä tahansa sen piste; käyrä on yksi ainoa piste.

420.

Esittäköön yhtälö $U(x)=x^{\mathrm{T}}Ax+2b^{\mathrm{T}}x+\omega=0$ hyperbeliä, jonka keskipiste on $P_0 \mathrel{\widehat{=}} x_0$. Osoita, että a) $U(x)-U(x_0)=0$ on asymptoottien yhteinen yhtälö, b) $U(x)-2U(x_0)=0$ on liittohyperbelin yhtälö, c) $x^{\mathrm{T}}Ax=0$ antaa origon kautta kulkevat asymptoottien suuntaiset suorat.

VASTAUS:

421.

Esittäköön yhtälö $U(x) = x^T Ax + 2b^T x + \omega = 0$ hyperbeliä; olkoon

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}.$$

Osoita edellisen tehtävän perusteella, että hyperbelin asymptoottien kulmakertoimet saadaan yhtälöstä $\beta m^2 + 2\gamma m + \alpha = 0$. Laske tämän perusteella hyperbelin $2x^2 - xy + 3x - y - 1 = 0$ asymptootit.

VASTAUS: $x + 1 = 0,\ 2x - y + 1 = 0$.

422.

Määritä pisteiden $(0,-3)$, $(-6,0)$, $(-4,0)$ ja $(0,-2)$ kautta kulkeva kartioleikkausparvi sekä tähän parveen kuuluvan paraabelin huippu.

VASTAUS: $(x+2y+4)(x+2y+6)+kxy = 0; \quad (-\frac{3}{20}, -\frac{63}{40})$.

423.

Määritä kartioleikkausparvi, jonka käyrät kulkevat pisteiden $(0,1)$ ja $(0,3)$ kautta sekä sivuavat suoraa $y = x$ pisteessä $(1,1)$. Määritä tähän parveen kuuluvan tasasivuisen hyperbelin keskipiste.

VASTAUS: $x(x-y)+k(y-1)(2x+y-3) = 0; \quad (\frac{8}{13}, \frac{14}{13})$.

424.

Määritä se kartioleikkaus, joka sivuaa ympyrää $x^2 + y^2 = 2$ pisteessä $(1,1)$, hyperbeliä $2x^2 - 3y^2 = 6$ pisteessä $(3,2)$ ja kulkee pisteen $(2,2)$ kautta.

VASTAUS: $3x^2 + 7y^2 - 8xy + x - 7y + 4 = 0$.

425.

Määritä kaksiparametrinen kartioleikkausparvi, jonka käyrät kulkevat pisteiden $(-1,0)$ ja $(1,0)$ kautta sekä sivuavat suoraa $x = 3$.

VASTAUS: $(sx-2y-s)(sx-4y+s)+t(x-3)y = 0$ (sivuamispiste $(3,s)$).

9.7. Yleinen toisen asteen pinta

426.

Kirjoita toisen asteen pinnan $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz - 4zx = 1$ yhtälö matriisimuotoon. Laske matriisin ominaisarvot. Minkä tyyppinen pinta on kyseessä?

VASTAUS:

427.

Tutki, millaista toisen asteen pintaa esittävät seuraavat yhtälöt:

$$\text{a) } x^2 - 2yz = 1, \quad \text{b) } 3x^2 + 15y^2 - 5z^2 - 12x - 10z + 22 = 0.$$

VASTAUS:

428.

Muodosta toisen asteen pintaa $2x^2+6y^2+2z^2+8xz=360$ vastaava neliömatriisi ja määritä tämän ominaisarvot. Millainen pinta on kyseessä?

VASTAUS:

429.

Tutki, millaista toisen asteen pintaa esittävät seuraavat yhtälöt:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } x^2+2y^2-3z^2+12xy-4yz-8zx+14x+16y-12z-33=0,\\
&\text{b) } -xy+yz-zx+x+y+2z-2=0,\\
&\text{c) } 5x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4zx+2x+1=0,\\
&\text{d) } y^2-z^2+4xy-4zx-3=0,\\
&\text{e) } x^2-xy-yz+zx-2x+y-z+1=0,\\
&\text{f) } 36x^2+9y^2+4z^2+36xy+12yz+24zx-49=0.
\end{aligned}$$

VASTAUS: a) kaksivaippainen hyperboloidi; b) kartio; c) suora; d) hyperbolinen lieriö; e) kaksi leikkaavaa tasoa; f) kaksi yhdensuuntaista tasoa.

430.

Tutki, millaista toisen asteen pintaa esittävät seuraavat yhtälöt:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } 4x^2+2y^2+3z^2-4yz+4zx+6x+4y+8z+2=0,\\
&\text{b) } 4x^2+y^2+z^2+4xy+2yz+4zx-24x+32=0.
\end{aligned}$$

VASTAUS: a) Elliptinen paraboloidi; b) parabolinen lieriö.

431.

Selosta, minkälaisia pintoja seuraavat toisen asteen yhtälöt esittävät:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad (x-2)^2+(y-3)^2=z^2,\\
&\text{b)} \quad (x+y)^2+(3x+2y+z)^2=0,\\
&\text{c)} \quad (x+y)(3x+2y+z)=0,\\
&\text{d)} \quad x^2+x-5=0.
\end{aligned}$$

VASTAUS: a) Kartio; b) suora; c) kaksi leikkaavaa tasoa; d) kaksi yhdensuuntaista tasoa.

432.

Määritä pinnan $x^2+2syz-t^2=0$ laatu kaikilla parametrien s ja t arvoilla.

VASTAUS: $s\neq 0,\ t\neq 0$, yksivaippainen hyperboloidi; $s\neq 0,\ t=0$, kartio; $s=0,\ t\neq 0$, kaksi yhdensuuntaista tasoa; $s=t=0$, taso.

433.

Määritä a ja b siten, että yhtälö $x^2-y^2+3z^2+(ax+by)^2=1$ esittää pyörähdyslieriötä.

VASTAUS: $a = \pm 1,\ b = \pm\sqrt{2}$.

434.

Osoita, että yhtälö $2xy + 2yz = 4zx$ esittää kartiopintaa. Määritä kartion akseli. Onko kyseessä pyörähdyspinta?

VASTAUS:

435.

Kirjoita toisen asteen pinnan yleinen yhtälö. Osoita, että tämä on välttämättä muotoa $axy + byz + czx = 0$, jos suorakulmaisen avaruuskoordinaatiston x-, y- ja z-akseli sijaitsevat pinnalla. Millainen pinta on kyseessä, jos a) $a = b = c = 2$, b) $a = 0,\ b = c = 2$?

VASTAUS:

436.

Todista, että neliparametrinen pintaparvi (parametreina a, b, c, d) $x^2 + az^2 + 2yz + 2bzx + 2cx + 2dz + c^2 = 0$ sisältää korkeintaan kahta eri tyyppiä olevia pintoja. Mitkä tyypit tulevat kysymykseen?

VASTAUS: Piste tai kartio.

437.

Osoita, että jos pinnan $x^T Ax + 2b^T x + \omega = 0$ pisteessä $P_0 \mathrel{\widehat{=}} x_0$ toteutuu yhtälö $Ax_0 + b = o$, niin pinnan yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $(x - x_0)^T A(x - x_0) = 0$. Millainen pinta ja millainen piste voi tulla kysymykseen?

VASTAUS: Pinta on kartio ja piste sen kärki; pinta on suora ja piste mikä tahansa sen piste; pinta on kaksi leikkavaa tasoa ja piste mikä tahansa näiden leikkaussuoran piste; pinta on taso ja piste mikä tahansa sen piste; pinta on yksi ainoa piste.

438.

Esittäköön yhtälö $U(x) = x^T Ax + 2b^T x + \omega = 0$ hyperboloidia, jonka keskipiste on $P_0 \mathrel{\widehat{=}} x_0$. Osoita, että a) $U(x) - U(x_0) = 0$ on asymptoottikartion yhtälö ja b) $U(x) - 2U(x_0) = 0$ on liittohyperboloidin yhtälö.

VASTAUS:

439.

Olkoon $U(x) = x^T Ax + 2b^T x + \omega = 0$ toisen asteen pinnan yhtälö. Osoita, että muuttujan t toisen asteen yhtälöstä $U(x_0 + \tau v) = 0$ puuttuu ensimmäisen asteen termi kaikilla vektoreilla v, jos ja vain jos $Ax_0 + b = o$. Tulkitse tulos geometrisesti.

VASTAUS:

440.

Mitä voidaan sanoa toisen asteen pinnan $x^T Ax + 2b^T x + \omega = 0$ laadusta, jos a) tiedetään, että matriisin A ominaisarvoista kaksi on erimerkkistä, mutta kolmannesta ei tiedetä mitään; b) edellisen lisäksi tiedetään, että pintaa ei voida leikata tasoilla siten, että leikkauskuvio olisi ellipsi; c) edellisten lisäksi tiedetään, että pinnalla on tasoleikkauksia, joissa leikkauskuvio on paraabeli?

VASTAUS: a) Kaksivaippainen hyperboloidi, yksivaippainen hyperboloidi, kartio, hyperbolinen lieriö, kaksi leikkaavaa tasoa tai hyperbolinen paraboloidi; b) hyperbolinen lieriö, kaksi leikkaavaa tasoa tai hyperbolinen paraboloidi; c) hyperbolinen paraboloidi.

441.

Osoita, että jos toisen asteen pinnan yhtälössä $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\delta xy + 2\varepsilon yz + 2\zeta zx + 2\eta x + 2\vartheta y + 2\kappa z + \omega = 0$ on $\alpha = \beta = \gamma$ ja $\delta = \varepsilon = \zeta$, niin kyseessä on pyörähdyspinta tai parabolinen lieriö. Mikä on pyörähdyspinnan akselin suunta?

VASTAUS: Akselin suunta $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

442.

Olkoon U pinta $x^{\mathrm{T}}Ax + 2b^{\mathrm{T}}x + \omega = 0$ ja U_0 pinta $x^{\mathrm{T}}Ax = 0$. Osoita, että quad a) jos U on ellipsoidi tai piste, niin U_0 on piste; b) jos U on hyperboloidi tai kartio, niin U_0 on kartio; c) jos U on elliptinen lieriö, elliptinen paraboloidi tai suora, niin U_0 on suora; d) jos U on hyperbolinen lieriö, hyperbolinen paraboloidi tai kaksi leikkaavaa tasoa, niin U_0 on kaksi leikkaavaa tasoa; e) jos U on kaksi yhdensuuntaista tasoa, parabolinen lieriö tai taso, niin U_0 on taso.

VASTAUS:

443.

Tutki piirtämällä, mitä toisen asteen pintaa yhtälö $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4yz + 4zx + 6x + 4y + 8z + 2 = 0$ esittää. Määritä pinnan yhtälö pääakselikoordinaatistossa ja esitä tarvittava koordinaatistomuunnos. Mikä on uuden koordinaatiston origo ja mitkä ovat kantavektorit?

VASTAUS:

444.

Tutki ominaisarvojen avulla, millaista toisen asteen pintaa esittää yhtälö

$$36x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 36xy + 12yz + 24zx = 49.$$

VASTAUS:

445.

Piirrä edellisen tehtävän pinnan ja kordinaattitasojen leikkauskäyrät.

VASTAUS: