

12. Abstraktia algebraa

12.1. Ryhmä, rengas ja kunta

502.

Määritellään joukon $A = \{a, b, c\}$ alkioiden laskutoimitus \circ seuraavalla taulukolla:

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| | a | b | c |
| a | a | b | c |
| b | b | c | a |
| c | c | a | b |

Osoita, että (A, \circ) on Abelin ryhmä.

VASTAUS:

503.

Totea, että jos laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen, niin tason E^2 tai avaruuden E^3 translaatiot muodostavat Abelin ryhmän.

VASTAUS:

504.

Tutki, muodostavatko a) tason E^2 , b) avaruuden E^3 origokeskiset kierrot ryhmän, kun laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen. Onko kyseessä Abelin ryhmä?

VASTAUS:

505.

Olkoon $(A, +, \circ)$ kunta ja olkoot $a, b \in A$ tunnettuja alkioita, $a \neq 0$. Osoita, että yhtälöllä $a \circ x = b$ on täsmälleen yksi ratkaisu $x \in A$.

VASTAUS:

506.

Totea esimerkiksi neliömatriiseja tarkastelemalla, että edellisen tehtävän yhtälöllä voi olla useita ratkaisuja tai ei ratkaisua lainkaan, jos $(A, +, \circ)$ oletetaan vain renkaaksi.

VASTAUS:

12.2. Lineaariavaruus

507.

Joukon \mathbb{R}^2 laskutoimitukset määritellään tavallisuudesta poikkeavalla tavalla:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_2, x_2 + y_1), \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, y) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Mitkä lineaariavaruuden aksioomat ovat tällöin voimassa?

VASTAUS:

508.

Avaruuden \mathbb{R}^2 osajoukossa $E = \{(x, y) \mid x + y = 2\}$ määritellään laskutoimitukset seuraavasti:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 - 1), \\ \lambda(x, y) &= (\lambda x + 1 - \lambda, \lambda y + 1 - \lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Osoita, että E on lineaariavaruus. Mikä on laskutoimitusten määrittelyn geometrinen sisältö?

VASTAUS:

509.

Ratkaise edellisen tehtävän joukossa E yhtälö $(2, 0) + 7(x, y) = (-6, 8)$.

VASTAUS: $(-\frac{1}{7}, \frac{15}{7})$.

510.

Olkoot a ja b reaalisen lineaariavaruuden E tunnettuja alkioita, olkoon $x \in E$ tuntematon. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Todista lineaariavaruuden aksioomiin perustuen, että yhtälöllä $\lambda x + a = b$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Mitä aksioomia tällöin tarvitaan?

VASTAUS:

511.

Osoita, että enintään astetta n olevat polynomit muodostavat lineaariavaruuden. Muodostavatko täsmälleen astetta n olevat polynomit lineaariavaruuden?

VASTAUS:

512.

Tutki, ovatko enintään toista astetta olevien polynomien muodostamaan lineaariavaruuteen kuuluvat polynomit $p_1(t) = 1 - t$, $p_2(t) = t(1 - t)$, $p_3(t) = 1 - t^2$ lineaarisesti riippumattomia.

VASTAUS: Eivät.

513.

Osoita, että enintään astetta n olevien polynomien muodostaman lineaariavaruuden dimensio on $n + 1$.

VASTAUS:

514.

Korkeintaan 1. astetta olevien reaalikertoimsten polynomien $p(t) = at + b$ joukossa määritellään laskutoimitukset seuraavasti:

$$\begin{aligned}(p_1 + p_2)(t) &= (a_1 + a_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)t, \\ (\lambda p)(t) &= \lambda b t.\end{aligned}$$

Mitkä lineaariavaruuden aksioomat ovat voimassa?

VASTAUS:

12.3. Ekvivalenssirelaatio

515.

Luonnollisten lukujen p ja q välille määritellään relaatio R asettamalla

$$p R q \iff p \text{ on luvun } q \text{ tekijä.}$$

Tutki, onko relaatio a) refleksiivinen, b) symmetrinen, c) transitiiivinen. Onko kyseessä ekvivalenssirelaatio?

VASTAUS:

516.

Tason suorien joukossa määritellään relaatio R asettamalla

$$s_1 R s_2 \iff \text{suorilla } s_1 \text{ ja } s_2 \text{ on yhteinen piste.}$$

Tutki, onko relaatio a) refleksiivinen, b) symmetrinen, c) transitiiivinen. Onko kyseessä ekvivalenssirelaatio?

VASTAUS:

517.

Joukon A relaatiota R sanotaan *järjestysrelaatioksi*, jos se on transitiiivinen ja jos täsmälleen yksi ehdoista xRy , yRx ja $x = y$ on voimassa mille tahansa alkioparille $(x, y) \in A \times A$. Päättele, että relaatio $<$ ($x < y \iff x$ on pienempi kuin y) on järjestysrelaatio joukossa \mathbb{R} .

VASTAUS:

518.

Olkoon \mathcal{P} universumin \mathcal{U} kaikkien osajoukkojen muodostama joukko. Tutki, ovatko joukko-opilliset osajoukko-relaatiot \subset ja \subsetneq a) transitiiivisia, b) järjestysrelaatioita joukossa \mathcal{P} .

VASTAUS:

519.

Reaalilukuparien välille määritellään relaatio R seuraavasti:

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \iff x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2.$$

Onko kyseessä järjestysrelaatio?

VASTAUS: