4. Differentiaaliyhtälöryhmät

4.1. Ryhmän palauttaminen yhteen yhtälöön

176.

Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmät

$$\text{a)}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t \\ \dfrac{dy}{dt} = x + t \end{cases}, \quad \text{b)}\ \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - z + \sin x \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z + \cos x \end{cases}, \quad \text{c)}\ \begin{cases} x^2 \dfrac{dy}{dx} + z = x^2 \\ \dfrac{dz}{dx} + 2y = x \end{cases}.$$

VASTAUS: a) $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - t - 1$, $y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - t - 1$;
b) $y = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x) - \frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x$, $z = e^x(-C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x$;
c) $y = C_1 x + C_2/x^2 + \frac{1}{3}x \ln|x|$, $z = (\frac{2}{3} - C_1)x^2 + 2C_2/x - \frac{1}{3}x^2 \ln|x|$.

177.

Etsi yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y + e^t. \end{cases}$$

VASTAUS: $x = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t} - e^t$, $y = C_1(\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}t} - C_2(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}t}$.

178.

Ratkaise alkuarvoprobleemat

$$\text{a)}\ \begin{cases} y' = 7y - z \\ z' = -y + 7z \end{cases}, \quad y(0) = 1,\ z(0) = 2,$$

$$\text{b)}\ \begin{cases} 3y' - 5y + z' + 5z = 0 \\ y' - y + 2z = 0 \end{cases}, \quad y(0) = 1,\ z(0) = 0.$$

VASTAUS: a) $y = -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}e^{6x}$, $z = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}e^{6x}$;
b) $y = e^x \cos 2x$, $z = e^x \sin 2x$.

179.

Olkoot x ja y muuttujan t funktioita. Ratkaise alkuarvoprobleema

$$\begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^3 \end{cases}, \qquad x(0) = y(0) = 0.$$

VASTAUS: $x = -2e^t + 2e^{-t} + t^3 + 4t$, $y = -2e^t - 2e^{-t} + 2t^2 + 4$.

180.

Ratkaise differentiaaliyhtälösysteemi

$$\begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x + t, \end{cases}$$

kun alkuehtona on $x(1)=y(1)=2(e-1)$. Piirrä ratkaisukäyrät.

VASTAUS: $x=y=2e^t-t-1$.

181.

Ratkaise kaikilla arvoilla $a\in\mathbb{R}$ yhtälöryhmät

$$\text{a)}\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ay+1\\ \dfrac{dy}{dt}=2y+ax\end{cases},\quad \text{b)}\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+a^2y=\cos at\\ \dfrac{dy}{dt}+a^2x=\sin at\end{cases}.$$

VASTAUS: a) Jos $a\neq 0$, niin $x=C_1e^{(1+\sqrt{1+a^2})t}+C_2e^{(1-\sqrt{1+a^2})t}+2/a^2$,
$y=C_1(1+\sqrt{1+a^2})/a\ e^{(1+\sqrt{1+a^2})t}+C_2(1-\sqrt{1+a^2})/a\ e^{(1-\sqrt{1+a^2})t}-1/a$;
jos $a=0$, niin $x=t+C_1$, $y=C_2e^{2t}$;
b) jos $a\neq 0$, niin $x=C_1e^{a^2t}+C_2e^{-a^2t}+(a+1)/(a(a^2+1))\ \sin at$, $y=-C_1e^{a^2t}+C_2e^{-a^2t}+(a-1)/(a(a^2+1))\ \cos at$;
jos $a=0$, niin $x=t+C_1$, $y=C_2$.

182.

Etsi differentiaaliyhtälöryhmän $x'+y=y'+z=z'+x=0$ yleinen ratkaisu sekä alkuehdon $x(0)=y(0)=z(0)=1$ toteuttava yksityisratkaisu.

VASTAUS:

183.

Olkoot $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ja $u(t)$ tuntemattomia funktioita. Etsi differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases}x'=y\\ y'=z\\ z'=u\\ u'=x\end{cases}$$

yleinen ratkaisu.

VASTAUS: $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\sin t+C_4\cos t$, $y=C_1e^t-C_2e^{-t}+C_3\cos t-C_4\sin t$,
$z=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\sin t-C_4\cos t$, $u=C_1e^t-C_2e^{-t}-C_3\cos t+C_4\sin t$.

184.

Olkoot $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$ tuntemattomat funktiot. Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases}x'=y-z\\ y'=z-2x\\ z'=2x-y\end{cases}$$

alkuehdolla $x(0)=1$, $y(0)=2$, $z(0)=3$.

VASTAUS:

185.

Ratkaise: $\dfrac{dx}{x}=-\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{u}=-\dfrac{du}{z}$.

VASTAUS: $y=-x+C_1$, $z=C_2\sin\ln|x|+C_3\cos\ln|x|$, $u=C_2\cos\ln|x|-C_3\sin\ln|x|$.

186.

Olkoot $x(t)$ ja $y(t)$ tuntemattomat funktiot. Etsi yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x'' - 3x - 4y + 3 = 0 \\ y'' + x + y + 5 = 0 \end{cases}.$$

VASTAUS: $x = e^t(C_1 + C_2t) + e^{-t}(C_3 + C_4t) - 23$, $y = \frac{1}{2}e^t(C_2 - C_1 - C_2t) - \frac{1}{2}e^{-t}(C_3 + C_4 + C_4t) + 18$.

187.

Olkoot $x(t)$ ja $y(t)$ tuntemattomat funktiot, $m \in \mathbb{R}$. Etsi yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x'' + 2m^2y = 0 \\ y'' - 2m^2x = 0 \end{cases}.$$

VASTAUS: Jos $m \neq 0$, niin
$x = e^{mt}(C_1 \sin mt + C_2 \cos mt) + e^{-mt}(C_3 \sin mt + C_4 \cos mt)$,
$y = e^{mt}(-C_1 \cos mt + C_2 \sin mt) + e^{-mt}(C_3 \cos mt - C_4 \sin mt)$;
jos $m = 0$, niin $x = C_1 + C_2t$, $y = C_3 + C_4t$.

188.

Palauta *Jacobi'n differentiaaliyhtälö*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a_2x + b_2y + c_2) - y(a_3x + b_3y + c_3)}{(a_1x + b_1y + c_1) - x(a_3x + b_3y + c_3)}$$

d'Alembertin systeemiksi

$$\frac{dx_k}{dt} = a_kx_1 + b_kx_2 + c_kx_3, \quad k = 1, 2, 3,$$

asettamalla

$$x(t) = \frac{x_1(t)}{x_3(t)}, \quad y(t) = \frac{x_2(t)}{x_3(t)}.$$

VASTAUS: Lausu x, y ja $\frac{dy}{dx}$ muuttujan t avulla ja totea, että d'Alembertin systeemin ratkaisut toteuttavat tämän.

4.2. Autonomiset ryhmät

189.

Ratkaise autonomiset normaaliryhmät

$$\text{a)} \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 3y + z = 0 \\ \dfrac{dz}{dx} - y + z = 0 \end{cases}, \quad \text{b)} \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3z - y \\ \dfrac{dz}{dx} = z + y \end{cases}.$$

Ovatko ratkaisujen kuvaajat faasitasossa rajoitettuja?

VASTAUS: a) $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x)$, $z = e^{-2x}(-C_1 - C_2 - C_2x)$;
b) $y = C_1e^{2x} + 3C_2e^{-2x}$, $z = C_1e^{2x} - C_2e^{-2x}$.

190.

Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = v + w + 1 \\ \dfrac{dv}{dx} = w + u + 2 \\ \dfrac{dw}{dx} = u + v + 3 \end{cases}.$$

VASTAUS: $u = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - 2$, $v = C_1e^{2x} + C_3e^{-x} - 1$, $w = C_1e^{2x} - (C_2 + C_3)e^{-x}$.

191.

Olkoot x ja y muuttujan t funktioita, joille pätee

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -2x \end{cases}.$$

Millaisia ovat ratkaisukäyrät faasitasossa? Johda näiden yhtälöt.

VASTAUS:

192.

Johda välttämätön ja riittävä ehto sille, että differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

ratkaisussa esiintyy trigonometrisia funktioita. Totea, että ehto $bc < 0$ on kylläkin välttämätön, mutta ei riittävä.

VASTAUS: $(a-d)^2 + 4bc < 0$; jos $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 0$, nähdään, että ehto $bc < 0$ ei ole riittävä.

193.

Heiluri, joka muodostuu painottoman varren (pituus L) päässä olevasta massasta m, saatetaan heilahtelemaan pystysuorassa tasossa. Heilahduskulma olkoon ϑ. Muodosta Newtonin lakien mukainen liikeyhtälö, johda vastaava normaaliryhmä ja totea se autonomiseksi. Muodosta normaaliryhmästä faasitasokäyrien differentiaaliyhtälö ja ratkaise se. Piirrä ratkaisukäyrien kuvaajia.

VASTAUS: $\vartheta'' + (g/L)\sin\vartheta = 0$; $\quad y_1' = y_2$, $y_2' = -(g/L)\sin y_1$;
$\dfrac{dy_1}{dy_2} = -\dfrac{Ly_2}{g\sin y_1}$; $\quad y_2^2 = 2(g/L)\cos y_1 + 2C$.

4.3. Lineaarisen vakiokertoimisen ryhmän matriisimuoto

194.

Kirjoita differentiaaliyhtälöryhmä (muuttujana t)

$$\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = z - 2x, \\ z' = 2x - y \end{cases}$$

matriisimuotoon ja ratkaise se diagonalisoimalla matriisi.

VASTAUS: $x = C_1 + C_2(-1 + i\sqrt{5})e^{i\sqrt{5}t} - C_3(1 + i\sqrt{5})e^{-i\sqrt{5}t}$,
$y = 2C_1 - C_2(2 + i\sqrt{5})e^{i\sqrt{5}t} + C_3(-2 + i\sqrt{5})e^{-i\sqrt{5}t}$,
$z = 2C_1 + 3C_2e^{i\sqrt{5}t} + 3C_3e^{-i\sqrt{5}t}$.

195.

Ratkaise ominaisarvoteoriaa käyttäen differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3z - y \\ \dfrac{dz}{dx} = z + y \end{cases}.$$

VASTAUS:

196.

Ratkaise ominaisarvoteoriaa käyttäen

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = u \\ u' = x \end{cases}.$$

VASTAUS: $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t$, $y = C_1e^t - C_2e^{-t} + C_3 \cos t - C_4 \sin t$,
$z = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3 \sin t - C_4 \cos t$, $u = C_1e^t - C_2e^{-t} - C_3 \cos t + C_4 \sin t$.

197.

Etsi differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} x' - x - y + 2z = 0 \\ y' - 2x + 2z = 0 \\ z' + 2x - 2y - z = 0 \end{cases}.$$

yleinen ratkaisu sekä alkuehdon $x(0) = y(0) = z(0) = 1$ toteuttava yksityisratkaisu ominaisarvoteoriaa käyttäen.

VASTAUS: $x = C_1e^{-t} + 2C_2e^t + C_3e^{2t}$, $y = 2C_2e^t + C_3e^{2t}$, $z = C_1e^{-t} + C_2e^t$; $x = 2e^t - e^{2t}$, $y = 2e^t - e^{2t}$, $z = e^t$.