1. Topologiaa

1.1. Ympäristö

1.2. Topologisia peruskäsitteitä

1.

Määritä seuraavien reaalilukujoukkojen kasautumispisteet:

$$\text{a)}\ \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad \text{b)}\ \left\{(-1)^n \frac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

VASTAUS: a) 0; b) $-1,\ 1$.

2.

Reaalilukujoukoilla S ja T olkoon seuraava ominaisuus:

$$x \in S \wedge y \in T \quad \Longrightarrow |x-y| > c,$$

missä c on positiivinen vakio. Todista, että joukoilla S ja T ei ole yhtään yhteistä kasautumispistettä.

VASTAUS:

3.

Olkoon S reaalilukujoukko ja $\sup S = G$. Todista, että jos $G \notin S$, niin G on joukon S kasautumispiste.

VASTAUS:

4.

Tutki, ovatko seuraavat joukot S_k avoimia tai suljettuja (tai ei kumpiakaan). Määritä joukkojen sisäpisteet, reunapisteet ja kasautumispisteet.

$S_1 =]-1,0[\cup]0,1] \subset \mathbb{R}$, $S_2 = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$,
$S_3 = \complement(S_2) \subset \mathbb{R}$, $S_4 = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ y \in [c,d]\} \subset \mathbb{R}^2$,
$S_5 = \{(x,y) \mid |x|+|y| = 1\} \cap \{(x,y) \mid y \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$, $S_6 = \{(x,y) \mid x+y \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$,
$S_7 = \{(x,y,z) \mid xyz \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

VASTAUS:

5.

Todista, että joukko S on avoin, jos ja vain jos se on muotoa $U_\delta(x)$ olevien ympäristöjen unioni.

VASTAUS:

6.

Todista, että avoimien joukkojen unioni on avoin.

VASTAUS:

7.

Anna esimerkki, joka osoittaa, että suljettujen joukkojen unioni ei välttämättä ole suljettu.

VASTAUS:

8.

Jos joukkoon S liitetään sen kasautumispisteet, saadaan joukon S *sulkeuma* $\overline{S}$. Osoita: $\overline{S} = S \cup \partial S$.

VASTAUS:

9.

Jos joukkoon S liitetään sen kasautumispisteet, saadaan joukon S *sulkeuma* $\overline{S}$. Osoita: a) $S \subset T \implies \overline{S} \subset \overline{T}$, b) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$.

VASTAUS:

10.

Todista, että joukon reuna on suljettu joukko.

VASTAUS:

11.

Todista, että suljetun joukon reuna kuuluu itse joukkoon, ts. jos S on suljettu joukko, niin $\partial S \subset S$.

VASTAUS:

12.

Jos joukkoon S liitetään sen kasautumispisteet, saadaan joukon S *sulkeuma* $\overline{S}$. Todista: $\partial\overline{S} \subset \partial S$. Anna esimerkki, jossa $\partial\overline{S}$ on reunan ∂S aito osajoukko.

VASTAUS:

13.

Todista, että joukon kasautumispisteiden muodostama joukko on suljettu.

VASTAUS:

14.

Olkoon S tason $\mathbb{R}^2$ joukko. Osoita, että joukko $\{\sqrt{x^2+y^2} \mid (x,y) \in S\} \subset \mathbb{R}$ on rajoitettu, jos ja vain jos joukot $\{x \mid \exists y \text{ siten, että } (x,y) \in S\} \subset \mathbb{R}$ ja $\{y \mid \exists x \text{ siten, että } (x,y) \in S\} \subset \mathbb{R}$ ovat rajoitettuja. Onko joukko $S \subset \mathbb{R}^2$ tällöin itse rajoitettu?

VASTAUS:

15.

Todista vääriksi seuraavat väitteet: a) Kahden alueen unioni on alue. b) Kahden alueen leikkaus on alue.

VASTAUS: