2. Lukujonot

2.1. Lukujonon määritelmä

16.

Fibonacci'n luvut määritellään ehdoilla

$$a_1 = a_2 = 1; \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Osoita:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

VASTAUS:

17.

Olkoon $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_{n+1} = \frac{1}{n}(na_n + a_{n-1} + 3)$ arvoilla $n \geq 2$. Todista, että $a_n \leq 4n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

VASTAUS: Induktio.

18.

Määritä $\inf\{\sqrt{n^2+9} - n/2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

VASTAUS: $\sqrt{13} - 1$.

2.2. Lukujonon suppeneminen

19.

Määritä lukujonon

$$a_n = \frac{2n^2}{n^2+n+1}$$

raja-arvo, kun $n \to \infty$, ja todista tulos suoraan määritelmän perusteella (ts. epsilontekniikkaa käyttäen).

VASTAUS:

20.

Todista raja-arvon määritelmään perustuen, että suppeneva lukujono on rajoitettu, ts. jos $\lim a_n = a$, niin on olemassa luku $M > 0$ siten, että $|a_n| \leq M$ kaikilla indekseillä n.

VASTAUS:

21.

Todista raja-arvon määritelmään perustuen seuraava lause: Jos lukujonolle $\langle a_n \rangle$ pätee $\lim a_n = a$ ja $\lim a_n = b$, niin $a = b$.

VASTAUS:

22.

Todista yksityiskohtaisesti lukujonojen raja-arvoja koskeva lause: Jos $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ja $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, niin $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$. Päteekö kääntäen

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b \implies \lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b\ ?$$

VASTAUS:

23.

Todista: Jos lukujonolle $\langle a_n \rangle$ pätee $a_n > 0$ kaikilla indekseillä $n \in \mathbb{N}$ ja $\lim a_n = 0$, niin on olemassa $\max\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$. Onko em. oletuksilla välttämättä olemassa myös $\min\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$?

VASTAUS:

24.

Olkoon $\langle a_n \rangle$ rajoitettu lukujono. Todista:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + a_n}{n} = 2.$$

VASTAUS:

25.

Olkoon

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n + a} = b \neq 0.$$

Osoita täsmällisesti, että lukujono $\langle a_n \rangle$ suppenee ja määritä sen raja-arvo.

VASTAUS: $\lim a_n = \dfrac{1}{b} - a$.

26.

Määritä raja-arvot

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right), \qquad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! - (n-1)!}{(n+1)! + (n-1)!},$$

$$\text{c) } \lim_{n\to\infty} \frac{1-2+3-\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}, \qquad \text{d) } \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n \right).$$

VASTAUS: a) $-\frac{1}{2}$; b) 1; c) -1; d) $\frac{1}{2}$.

27.

Määritä raja-arvo $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ kaikilla arvoilla $x \in \mathbb{R}$, kun

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}.$$

Piirrä funktioiden f_n kuvaajia indeksin n eri arvoilla. Piirrä myös funktion f kuvaaja.

VASTAUS:

28.

Määritä raja-arvo $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ kaikilla arvoilla $x \in \mathbb{R}$, kun

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

Piirrä funktioiden f_n kuvaajia indeksin n eri arvoilla. Piirrä myös funktion f kuvaaja.

VASTAUS:

29.

Osoita, että lukujono $\langle b_n \rangle$,

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n,$$

on kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Käytä Bernoulli'n epäyhtälöä. Mikä on jonon raja-arvo?

VASTAUS:

30.

Olkoon $\lim a_n = a$. Osoita:

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

VASTAUS:

31.

Olkoot $\langle a_n \rangle$ ja $\langle b_n \rangle$ kaksi lukujonoa, joille pätee $\lim(a_n e^n) = e$ ja $\lim(b_n n^{-10}) = \pi$. Määritä $\lim(a_n b_n)$, mikäli se on olemassa.

VASTAUS: $\lim(a_n b_n) = 0$.

32.

Lukujono $\langle a_n \rangle$ määritellään asettamalla

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = \frac{1 + 2a_n}{1 + a_n},\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Osoita induktiolla, että jono on ylhäältä rajoitettu ja kasvava. Päättele tästä, että jonon raja-arvo on olemassa ja laske se.

VASTAUS:

33.

Lukujono määritellään rekursiivisesti ehdoilla $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$. Osoita, että jono on kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Määritä sen raja-arvo.

VASTAUS: $a_n = 2 - 2^{2-n}$, $\lim a_n = 2$.

34.

Lukujono määritellään rekursiivisesti ehdoilla

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}.$$

Osoita, että jono on vähenevä ja alhaalta rajoitettu. Määritä sen raja-arvo.

VASTAUS: $a_n = 1/n$, $\lim a_n = 0$.

35.

Lukujono määritellään rekursiivisesti ehdoilla

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 5.$$

Osoita täsmällisesti, että jono suppenee ja määritä sen raja-arvo.

VASTAUS:

36.

Osoita seuraavat jonot monotonisiksi ja rajoitetuiksi sekä määritä niiden raja-arvot:

$$\text{a) } a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \qquad \text{b) } a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n}.$$

VASTAUS: a) $\lim a_n = 2$; b) $\lim a_n = 2$.

37.

Olkoon $a_1 \in \,]0, \pi/2[$ ja $a_{n+1} = \sin a_n$ $(n \geq 1)$. Osoita jono väheneväksi ja alhaalta rajoitetuksi sekä määritä sen raja-arvo.

VASTAUS: $\lim a_n = 0$.

38.

Tutki numeerisesti raja-arvoa

$$\lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n$$

sijoittamalla luvulle n yhä suurempia arvoja.

VASTAUS:

39.

Tutki numeerisesti raja-arvoja

$$\text{a) } \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \text{b) } \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n, \qquad \text{c) } \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}.$$

Mitkä ovat raja-arvojen tarkat arvot? Miten tulokset voi perustella?

VASTAUS:

2.3. Cauchyn suppenemiskriteeri

40.

Tutki seuraavien lukujonojen käyttäytymistä:

$$\text{a) } a_n = \cos \frac{n\pi}{4} + (-1)^n, \qquad \text{b) } a_n = \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Onko jonoilla raja-arvoa? Entä kasautumispisteitä? Mitä mahdettaisiin tarkoittaa käsitteillä *yläraja-arvo* ja *alaraja-arvo* (*limes superior* ja *limes inferior*)?

VASTAUS:

41.

Osoita, että lukujono $a_n = 1/n$ $(n \in \mathbb{N})$ toteuttaa Cauchyn suppenemisehdon, ts. määritä annettua lukua $\varepsilon > 0$ vastaava indeksiraja N.

VASTAUS:

42.

Lukujonolla $\langle a_n \rangle$ olkoon ominaisuudet

$$1)\ i \neq j \implies a_i \neq a_j, \qquad 2)\ \exists \lim a_n = a \in \mathbb{R}.$$

Todista, että a on lukujoukon $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ kasautumispiste. Voiko joukolla olla muita kasautumispisteitä? Jos ominaisuudesta 1) luovutaan, pitääkö väite paikkansa?

VASTAUS:

2.4. Reaalilukujen konstruoinnista