4. Alkeisfunktiot

4.1. Potenssifunktio

4.2. Polynomit ja rationaalifunktiot

102.

Todista, että jokaisella parittoman asteen reaalikertoimisella polynomilla on ainakin yksi reaalinen nollakohta.

VASTAUS:

103.

Olkoon $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ reaalikertoiminen polynomi. Todista, että polynomilla on ainakin yksi reaalinen nollakohta, jos $a_n a_0 < 0$.

VASTAUS:

104.

Todista, että jos kaksi polynomia, joiden asteluku on $\leq n$, saavat samat arvot n eri pisteessä, niin polynimt ovat samat.

VASTAUS:

105.

Todista, että jos astetta n olevalla polynomilla $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ on kohdissa x_i kertalukua m_i olevat nollakohdat ($i = 1, 2, \ldots, k$) ja $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$, niin voidaan kirjoittaa

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{m_1} \ldots (x - x_k)^{m_k}.$$

VASTAUS:

106.

Olkoot p ja q polynomeja, $\deg p = n$, $\deg q = m$, $n \geq m$. Osoita, että on olemassa polynomit h ja r siten, että $\deg r < \deg q$ ja $p = qh + r$. Osoita, että nämä ehdot määräävät yksikäsitteisesti polynomit h ja r.

VASTAUS:

107.

Polynomin p asteluku on ≤ 2 ja kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $|p(x)| \leq a|x|^3$, missä a on vakio. Osoita, että $p(x) \equiv 0$.

VASTAUS:

108.

Etsi sen polynomin kertoimet, jonka juurina ovat luvut $1, 2, \ldots, 20$.

VASTAUS:

109.

Piirrä käyrät

$$\text{a) } y = \frac{x}{4 - x^2}, \qquad \text{b) } y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}, \qquad \text{c) } y = \frac{|8x^2 - 8|}{x^4 + 8}$$

ja määritä niiden asymptootit.

VASTAUS:

110.

Minkä kahden muuttujan polynomiyhtälön ratkaisuna saadaan seuraava algebrallinen funktio:

$$\text{a) } \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad \text{b) } \sqrt{1-\sqrt{x}}+\sqrt{1+\sqrt{x}}\,?$$

VASTAUS:

4.3. Eksponentti- ja logaritmifunktio

111.

Määritä raja-arvo $\lim_{x\to\infty} x/(\ln x)^p$ ($p \in \mathbb{N}$) pitämällä tunnettuna raja-arvoa $\lim_{t\to\infty} e^t/t^p = \infty$.

VASTAUS:

112.

Määritä raja-arvo $\lim_{x\to 0+} x(\ln x)^p$ ($p \in \mathbb{N}$) pitämällä tunnettuna raja-arvoa $\lim_{t\to\infty} e^t/t^p = \infty$ ja sijoittamalla tähän $t = -\ln x$.

VASTAUS:

113.

Määritä raja-arvot

$$\text{a) } \lim_{x\to 0+} x^x, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0+} x^{x^x}.$$

Piirrä funktioiden kuvaajat origon oikealla puolella.

VASTAUS: a) 1; b) 0.

114.

Määritä raja-arvo

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{x}{y}\right)^y.$$

VASTAUS: e^x.

115.

Määritä raja-arvo

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}.$$

VASTAUS: $\ln a$.

116.

Olkoot a ja b positiivilukuja. Määritä raja-arvo

$$\lim_{n\to-\infty}\left(\frac{an-1}{an}\right)^{\frac{(b+1)n|n|}{b|n|-n}}.$$

VASTAUS: $e^{1/a}$.

117.

Määritä ne muuttujan x arvot, joilla käyrän $y=\ln(1+e^x)$ ja sen asymptootin ordinaattojen erotus on $<\ln(1+e^{-3})$.

VASTAUS: $x>3$, jolloin asymptoottina on $y=x$; $x<-3$, jolloin asymptoottina on $y=0$.

118.

Tutki, millainen xy-tason joukko on $\{\,(x,y)\mid \log_x y=\log_y x\,\}$. Piirrä kuvio.

VASTAUS:

119.

Osoita: a) $\log_a b\cdot\log_b a=1$, b) $\log_b a\cdot\log_c b=\log_c a$.

VASTAUS:

120.

Olkoon $a>1$. Todista: $\frac{1}{2}(\log_a x+\log_a y)\le\log_a\left[\frac{1}{2}(x+y)\right]$.

VASTAUS:

121.

Vuotuinen korkoprosentti on 5 ja korko lisätään pääomaan a) jatkuvan koronkoron mukaisesti, b) puolivuosittain. Mikä on eri tavoin saatujen pääomien suhde yhden vuoden kuluttua?

VASTAUS: $\exp(\frac{1}{20}):(1+\frac{1}{40})^2\approx 1.0006$.

122.

Pankkilainan vuotuinen korko on 12 % ja korko maksetaan kerran vuodessa. Laman syvetessä pankki joutuu nostamaan korkoa. Poliittisista syistä korkoprosenttia ei voida nostaa, vaan siirrytään järjestelmään, jossa kertynyt korko kuukausittain liitetään lainapääomaan, minkä jälkeen myös se alkaa kasvaa korkoa. Kuinka monta prosenttia vuosittain kertyvä korko tällöin kasvaa? Selvitä rajaprosessilla, kuinka suureen vuotuisen koron kasvuun on mahdollista päästä, jos kertyvä korko alkaa kasvaa korkoa heti syntyessään.

VASTAUS:

123.

Radioaktiivisen aineen hajoamisessa ainemäärä noudattaa eksponentiaalista vähenemislakia

$$m(t)=m_0e^{-\alpha t},$$

missä t on aika vuosissa, α aineelle ominainen vakio ja m_0 alkuperäinen ainemäärä. Määritä puoliintumisaika, so. aika, jossa ainemäärä vähenee puoleen, kun $\alpha=0.02$.

VASTAUS: $50\ln 2\approx 34.66$ vuotta.

4.4. Trigonometriset funktiot

124.

Tutki, onko yhtälöllä $\sin(\cos x)=\cos(\sin x)$ ratkaisuja. Piirrä sopivat kuvaajat ja selvitä asia myös päättelemällä.

VASTAUS: Ei ole.

125.

Määritä seuraavat raja-arvot:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}, \qquad \text{c) } \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x},$$
$$\text{d) } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+\tan 3x}-\sqrt{2-\tan 3x}}{x}, \qquad \text{e) } \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x^2)}{x^3+\sin(3x^2)}, \qquad \text{f) } \lim_{x\to a}\frac{\sin\sqrt[3]{x-a}}{\sqrt[3]{x^2-a^2}+\sin(x-a)}.$$

VASTAUS: a) $1/2$; b) $3/5$; c) π; d) $3/\sqrt{2}$; e) $2/3$; f) $1/\sqrt[3]{2a}$, jos $a \neq 0$; ∞, jos $a = 0$.

4.5. Trigonometrian kaavoja

126.

Laadi taulukko, jossa funktiot $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ja $\cot x$ ovat lausutut toistensa avulla.

VASTAUS:

127.

Olkoon $\sin\alpha = 7/25$ ja $\cot\beta = -5/12$. Laske lausekkeen $\sin(\alpha-\beta)$ mahdolliset arvot.

VASTAUS: Neljä eri arvoa: $\pm 323/325$, $\pm 253/325$.

128.

Osoita, että kolmion kulmat toteuttavat yhtälöt

$$\text{a) } \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$
$$\text{b) } \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma,$$
$$\text{c) } \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

VASTAUS:

129.

Ratkaise seuraavat trigonometriset yhtälöt:

$$\text{a) } \sin 2x = \cos 7x, \qquad \text{b) } \tan 2x = 3\tan x, \qquad \text{c) } \cos 2x = \sin x + \cos x,$$
$$\text{d) } 4\sin^2 x = \tan x, \qquad \text{e) } |\sin x + |\sin x|| = \cos x + |\cos x|.$$

VASTAUS: a) $x = \frac{\pi}{18} + n\frac{2\pi}{9}$ tai $x = \frac{3\pi}{10} + n\frac{2\pi}{5}$; b) $x = n\pi$ tai $x = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi$; c) $x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$ tai $x = n2\pi$ tai $x = -\frac{\pi}{2} + n2\pi$; d) $x = n\pi$ tai $x = \frac{\pi}{12} + n\pi$ tai $x = \frac{5\pi}{12} + n\pi$; e) $x = \frac{\pi}{4} + n2\pi$ tai $\pi + n2\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + n2\pi$; $n \in \mathbb{Z}$.

130.

Ratkaise seuraavat trigonometriset epäyhtälöt:

$$\text{a) } \sin|x| < |\sin x|, \qquad \text{b) } |\sin 2x| \geq |\sin 3x|, \qquad \text{c) } \sin 4x > \cot x - \tan x.$$

VASTAUS: a) $-2\pi - k2\pi < x < -\pi - k2\pi$ tai $\pi + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; b) $x = n\pi$ tai $\frac{\pi}{5} + n\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{5} + n\pi$ tai $\frac{3\pi}{5} + n\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{5} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

131.

Ratkaise yhtälöparit

$$\text{a)} \quad \begin{cases} \cos 3x \cos 2y = \dfrac{1}{2} \\ 3x - 2y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}, \qquad \text{b)} \quad \begin{cases} \sin x \cos y = 1 + \sin y \cos x \\ \tan(x+y) = \sqrt{3} \end{cases}.$$

VASTAUS: a) $x = n\frac{\pi}{3}$, $y = -\frac{\pi}{6} + n\frac{\pi}{2}$ tai $x = \frac{\pi}{9} + n\frac{\pi}{3}$, $y = n\frac{\pi}{2}$; b) $x = \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} + n2\pi$; $k, n \in \mathbb{Z}$.

132.

Missä xy-tason osissa on voimassa $\sin(x - y) + \cos x > 0$?

VASTAUS: Suorat $y = \frac{\pi}{2} + n2\pi$ ja $y = 2x + \frac{\pi}{2} + n2\pi$ jakavat xy-tason sunnikkaisiin; epäyhtälö on voimassa kaikkien suoria $x = n2\pi$ peittävien suunnikkaiden sisäosissa.

133.

Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x}.$$

VASTAUS: $1/\sqrt{3}$.

134.

Olkoon $f(x) = \sin^2 x + x$. Määritä jokin luku $\delta > 0$ siten, että

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{100}.$$

Miten tehtävä liitty funktion f jatkuvuuteen?

VASTAUS: Esimerkiksi $\delta = 1/200$.

4.6. Harmoninen värähtely

135.

Saata kahden siniværähtelyn summa a) $\sin 3x + \sin 5x$, b) $\sin 10x + \sin 9x$ muotoon $A \cos \alpha x \sin \beta x$, mikä voidaan tulkita muuttuva-amplitudiseksi siniværähtelyksi amplitudina $A \cos \alpha x$. Piirrä värähtelyn kuvaaja sekä samaan kuvioon amplitudikäyrän kuvaaja.

VASTAUS: a) $2\cos x \sin 4x$; b) $2\cos(x/2)\sin(19x/2)$.

136.

Piirrä funktion $y = \sin 10x + \sin 9x$ kuvaaja. Piirrä myös funktion $y = 2\cos\frac{x}{2}$ kuvaaja samaan kuvioon. Miten em. funktiot suhtautuvat toisiinsa? Laske yhteys trigonometrisesti.

VASTAUS:

137.

Kaksi eritaajuista, mutta sama-amplitudista sinivärähtelyä yhdistetään: $y(t) = \sin 10t + \sin(9t + \pi/2)$. Saata värähtely muotoon $y(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1)\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$. Piirrä värähtelyn kuvaaja. Mikä tulkinta voidaan antaa yhdistetyn värähtelyn tekijälle $A\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$?

VASTAUS:

138.

Osoita, että $y = \sin^2 x - \frac{1}{2}$ esittää harmonista värähtelyä. Määritä amplitudi, frekvenssi ja vaihe.

VASTAUS: $y = \frac{1}{2}\sin(2x - \frac{\pi}{2})$, $A = \frac{1}{2}$, $f = \frac{1}{\pi}$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

139.

Vaihtovirran kolmen eri vaiheen jännitteet ovat sama-amplitudisia ja samataajuisia sinivärähtelyjä, joiden vaihe-ero on $2\pi/3$:

$$V_i(t) = V_0\sin(\omega t + \varphi_i), \quad i = 1,2,3; \qquad \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_3 = \varphi_1 + \frac{4\pi}{3}.$$

Mikä on jännitteiden summa?

VASTAUS: 0.

140.

Määritä harmonisen värähtelyn

$$y = \sin\omega x + 2\sin(\omega x + \tfrac{2\pi}{3}) + 3\sin(\omega x + \tfrac{4\pi}{3})$$

amplitudi ja vaihekulma. Piirrä komponenttivärähtelyjen ja summan kuvaajat.

VASTAUS: $y = \sqrt{3}\sin(\omega x + 7\pi/6)$.

141.

Määritä värähtelyn $y = A\sin\omega x + A\sin(\omega x + \varphi)$ amplitudi, kun vaihe-ero on a) $\varphi = \pi/2$, b) $\varphi = \pi$, c) $\varphi = 2\pi$.

VASTAUS: a) $\sqrt{2}A$; b) 0; c) $2A$.

142.

Mikä on värähtelyn $\sin 5x + \sin 7x$ amplitudikäyrän jakso? Montako värähdystä mahtuu jaksolle? Mikä on värähtelyn jakso? Piirrä kuvio.

VASTAUS:

4.7. Trigonometristen funktioiden käänteisfunktiot

143.

Laske tarkat arvot lausekkeille

$$\text{a) } \sin(\overline{\text{arc}}\cos(-\frac{3}{5})), \qquad \text{b) } \cos(\overline{\text{arc}}\sin(-\frac{3}{5})), \qquad \text{c) } \sin(\overline{\text{arc}}\tan(-\sqrt{3})), \qquad \text{d) } \sin(\overline{\text{arc}}\cot(-\sqrt{3})).$$

VASTAUS: a) $4/5$; b) $4/5$; c) $-\sqrt{3}/2$; d) $1/2$.

144.

Laske tarkat arvot lausekkeille

$$\text{a) } \sin(\overline{\text{arc}}\tan 2 - \overline{\text{arc}}\tan 3), \qquad \text{b) } \cos(\overline{\text{arc}}\cot \frac{2}{5} + \overline{\text{arc}}\tan \frac{3}{7}), \qquad \text{c) } \tan(\overline{\text{arc}}\sin \frac{1}{2} - \overline{\text{arc}}\cos \frac{2}{3}).$$

VASTAUS: a) $-1/(5\sqrt{2})$; b) $-1/(29\sqrt{2})$; c) $\frac{1}{7}(9\sqrt{3} - 8\sqrt{5})$.

145.

Mitä arvoja lauseke $\arccos(\cos 13\pi/4)$ voi saada?

VASTAUS: $\pm 3\pi/4 + n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

146.

Ratkaise yhtälöt a) $\overline{\text{arc}}\tan x = \pi/4 - \overline{\text{arc}}\tan 3$, b) $\overline{\text{arc}}\cos x = \overline{\text{arc}}\tan 1 + \overline{\text{arc}}\cos(-3/4)$.

VASTAUS: a) $x = -1/2$; b) ei ratkaisua.

147.

Piirrä käyrä $\overline{\text{arc}}\tan x + \overline{\text{arc}}\tan y = \pi/4$.

VASTAUS: $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, $x > -1$.

148.

Määritä harmonisten värähtelyjen

$$\text{a) } y = \sin x + \sin(x - \overline{\text{arc}}\tan \frac{4}{3}),$$
$$\text{b) } y = \sqrt{5}\sin(\omega x + \overline{\text{arc}}\tan \frac{1}{2}) + 2\sqrt{2}\sin(\omega x + \frac{3\pi}{4}) + \sqrt{3}\sin(\omega x - \pi)$$

amplitudi ja vaihekulma. Piirrä kuvaajat.

VASTAUS: a) $y = \frac{4}{\sqrt{5}}\sin(x - \overline{\text{arc}}\tan \frac{1}{2})$; b) $y = 2\sqrt{3}\sin(\omega x + \frac{2\pi}{3})$.

149.

Lisäämällä harmoniseen värähtelyyn $y_1 = 2\sin(\omega x + \overline{\text{arc}}\tan 2\sqrt{2})$ sopivasti valittu harmoninen värähtely y_2, jonka kulmataajuus on myös ω, saadaan summaksi värähtely $y = 6\sin\omega x$. Mikä on värähtelyn y_2 amplitudi?

VASTAUS: $4\sqrt{2}$.

150.

Sievennä seuraavat lausekkeet ja piirrä kuvaajat:

$$\text{a) } y = \overline{\text{arc}}\tan(\tan x), \qquad \text{b) } y = \overline{\text{arc}}\tan \frac{2x}{1-x^2},$$
$$\text{c) } y = \overline{\text{arc}}\tan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{d) } y = \sin(2\,\overline{\text{arc}}\tan x),$$
$$\text{e) } y = y = \overline{\text{arc}}\tan x + \overline{\text{arc}}\tan \frac{1-x}{1+x}, \qquad \text{f) } y = 2\,\overline{\text{arc}}\tan x + \overline{\text{arc}}\sin \frac{2x}{1+x^2}.$$

VASTAUS: a) $y = x - n\pi$, kun $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; b) $y = \pi + 2\,\overline{\text{arc}}\tan x$, kun $x < -1$; $y = 2\,\overline{\text{arc}}\tan x$, kun $-1 < x < 1$; $y = -\pi + 2\,\overline{\text{arc}}\tan x$, kun $x > 1$; c) $y = \overline{\text{arc}}\sin x$, $x \in \,]-1,1[$; d) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$; e) $y = -\dfrac{3\pi}{4}$, kun $x < -1$; $y = \dfrac{\pi}{4}$, kun $x > -1$; f) $y = -\pi$, kun $x < -1$; $y = 4\,\overline{\text{arc}}\tan x$, kun $-1 \leq x \leq 1$; $y = \pi$, kun $x > 1$.

151.

Tutki graafisesti kaavan

$$2\,\overline{\text{arc}}\sin x = \overline{\text{arc}}\cos(1-2x^2)$$

voimassaoloa. Millä muuttujan arvoilla funktiot ovat määriteltyjä?

VASTAUS:

152.

Tutki kaavan

$$2\,\overline{\text{arc}}\sin x = \overline{\text{arc}}\cos(1-2x^2)$$

voimassaoloa käyttäen sijoitusta $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

VASTAUS:

153.

Tutki kaavan

$$\overline{\text{arc}}\tan x + \overline{\text{arc}}\tan y = \overline{\text{arc}}\tan \frac{x+y}{1-xy}, \quad xy \neq 1,$$

voimassaoloa. Siirrä kaavassa kaikki termit samalle puolen yhtäläisyysmerkkiä ja piirrä vastaava pinta $z = f(x,y)$.

VASTAUS: Kaava on voimassa, jos $xy < 1$; muutoin ei.

4.8. Hyperboliset funktiot

154.

Osoita, että hyperbolisille funktioille pätee kaava

$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx.$$

Millainen luku voi n olla?

VASTAUS: $n \in \mathbb{R}$.

155.

Osoita, että yhtälöllä $\cos x \cosh x + 1 = 0$ on äärettömän monta reaalijuurta.

VASTAUS:

4.9. Hyperbolisia kaavoja

156.

Johda kaavat, joissa $\sinh(x/2)$ ja $\cosh(x/2)$ lausutaan funktion $\cosh x$ avulla.

VASTAUS:

157.

Johda hyperbolisille funktioille kaavat

$$\begin{aligned} \sinh x + \sinh y &= \dots, & \sinh x - \sinh y &= \dots, \\ \cosh x + \cosh y &= \dots, & \cosh x - \cosh y &= \dots \end{aligned}$$

samalla tavoin kuin vastaavat kaavat johdetaan trigonometrisille funktioille. Onko kaavoissa merkkieroja?

VASTAUS:

4.10. Hyperbolisten funktioiden käänteisfunktiot

158.

Laske logaritmin avulla tarkka arvo lausekkeelle $\overline{\text{ar}}\cosh\sqrt{2}$.

VASTAUS: $\ln(1+\sqrt{2})$.

159.

Laske tarkat arvot funktioille $\cosh x$ ja $\tanh x$, kun $x = \operatorname{arsinh}\frac{4}{3}$.

VASTAUS: $5/3$, $4/5$.

160.

Osoita, että

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) = \pm\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ kaava on pätevä?

VASTAUS:

161.

Millä arvoilla funktio $f(x) = \overline{\text{ar}}\cosh(\coth(\ln x))$ on määritelty? Sievennä funktion lauseke ja piirrä sen kuvaaja.

VASTAUS:

162.

Lausu funktio $f(x) = \operatorname{arsinh}\sqrt{x^2-1}$ logaritmifunktion avulla. Millä muuttujan reaaliarvoilla funktio on määritelty? Miten funktio suhtautuu funktioon $\overline{\text{ar}}\cosh x$? Piirrä funktion kuvaaja.

VASTAUS: Määritelty, jos $|x| \geq 1$; $\quad f(x) = \ln(\sqrt{x^2-1}+|x|) = \overline{\text{ar}}\cosh|x|$.

163.

Sievennä lausekkeet a) $\tanh(\overline{\text{ar}}\cosh x)$, $\quad$ b) $\operatorname{artanh}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

VASTAUS: a) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; $\quad$ b) $\operatorname{arsinh} x$.