8. Vektoriarvoiset funktiot

8.1. Vektoriarvoisen funktion jatkuvuus ja derivoituvuus

320.

Olkoon u reaalimuuttujan vektoriarvoinen funktio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ja $\lim_{t\to a} u(t) = b$. Todista: $\lim_{t\to a} \|u(t)\| = \|b\|$.

VASTAUS:

321.

Olkoon u reaalimuuttujan vektoriarvoinen funktio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ja $\lim_{t\to a} u(t) = b$, missä $b \neq o$. Todista:

$$\lim_{t\to a} \frac{u(t)}{\|u(t)\|} = \frac{b}{\|b\|}.$$

VASTAUS:

322.

Olkoon u reaalimuuttujan vektoriarvoinen funktio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Osoita, että vaikka funktio $\|u(t)\|$ olisikin derivoituva, ei funktio $u(t)$ välttämättä ole.

VASTAUS: Esimerkiksi $u(t) = (1\ 0)^{\mathrm{T}}$, jos t on rationaalinen, ja $u(t) = (0\ 1)^{\mathrm{T}}$, jos t on irrationaalinen.

323.

Laske $\mathbf{u}'(t)$, $|\mathbf{u}'(t)|$, $\mathbf{u}''(t)$ ja $|\mathbf{u}''(t)|$ arvolla $t = 0$, kun

$$\text{a) } \mathbf{u}(t) = (t^3 + 2t)\,\mathbf{i} - 3e^{-2t}\,\mathbf{j} + 2\sin 5t\,\mathbf{k}, \qquad \text{b) } \mathbf{u}(t) = \ln(t^2+1)\,\mathbf{i} + \sqrt{t^2+1}\,\mathbf{j} + \frac{2t}{t^2+1}\,\mathbf{k}.$$

VASTAUS: a) $2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$, $2\sqrt{35}$, $-12\mathbf{j}$, 12; b) $2\mathbf{k}$, 2, $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\sqrt{5}$.

324.

Olkoon $\mathbf{u}(t)$ neljästi derivoituva vektorifunktio. Laske ensimmäinen ja toinen derivaatta skalaarikolmitulolle $[\mathbf{u}(t), \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}''(t)]$.

VASTAUS: $[\mathbf{u}(t), \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}'''(t)]$, $[\mathbf{u}(t), \mathbf{u}''(t), \mathbf{u}'''(t)] + [\mathbf{u}(t), \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}''''(t)]$.

325.

Olkoon $\mathbf{u}(t)$ derivoituva vektorifunktio ja $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{o}$. Osoita:

$$\mathbf{u}^0(t) \times \frac{d}{dt}\mathbf{u}^0(t) = \frac{\mathbf{u}(t)}{|\mathbf{u}(t)|^2} \times \frac{d}{dt}\mathbf{u}(t).$$

VASTAUS:

326.

Olkoon $\mathbf{e}(t)$ kahdesti derivoituva yksikkövektori ja $\mathbf{e}''(t) \neq \mathbf{o}$ kaikilla muuttujan t arvoilla. Osoita, että vektoreiden $\mathbf{e}(t)$ ja $\mathbf{e}''(t)$ välinen kulma ei koskaan ole terävä.

VASTAUS:

327.

Olkoot $\mathbf{u}(t)$ ja $\mathbf{v}(t)$ vektorifunktioita. Osoita, että jos $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$ ja $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{w} \times \mathbf{v}$, niin $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

VASTAUS:

328.

Olkoon $\mathbf{u}(t)$ derivoituva vektorifunktio ja $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ vakiovektori. Osoita:

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{comp}(\mathbf{u}, \mathbf{a}) = \mathrm{comp}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{a}\right),$$

missä $\mathrm{comp}(\mathbf{u}, \mathbf{a})$ tarkoittaa vektorin $\mathbf{u}$ skalaarikomponenttia vektorin $\mathbf{a}$ suunnalle.

VASTAUS:

329.

Olkoot $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ kaksi lineaarisesti riippumatonta vakiovektoria ja olkoon $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}\cos t + \mathbf{b}\sin t$. Osoita, että $[\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)] = 0$ kaikilla muuttujan t arvoilla. Jos t on aika ja $\mathbf{r}(t)$ esittää liikkuvan pisteen paikkavektoria, niin mikä on väitteen geometrinen tulkinta?

VASTAUS:

330.

Osoita, että yhtälö $z - p\sin z = t$ määrittää funktion $z = z(t)$, kun p on vakio ja $|p| < 1$. Näytä, että tämän funktion avulla määritelty vektorifunktio

$$\mathbf{r}(t) = (\cos z(t) - p)\,\mathbf{i} + \sqrt{1 - p^2}\sin z(t)\,\mathbf{j}$$

toteuttaa differentiaaliyhtälön $\mathbf{r}''(t) = -\mathbf{r}(t)/|\mathbf{r}(t)|^3$.

VASTAUS:

8.2. Taso- ja avaruuskäyrät

331.

Tutki, onko piste $\left(\frac{3125}{1024}, \frac{625}{256}\right)$ käyrällä

$$x = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1}, \quad y = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}.$$

Miten käyrä käyttäytyy, kun $t \to \infty$?

VASTAUS:

332.

Määritä käyränkaaren $\mathbf{r}(t) = \sqrt{\ln t}\,\mathbf{i} + (1/t)\,\mathbf{j}$, $t \in [1, 3]$, pisteiden suurin ja pienin etäisyys origosta. Piirrä kuvio.

VASTAUS: $\sqrt{\ln 3 + \frac{1}{9}}$, $\sqrt{\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}}$.

333.

Osoita, että kun ympyrä vierii liukumatta suoraa pitkin, sen kehällä oleva piste piirtää sykloidin.

VASTAUS:

334.

Määritä avaruuskäyrän $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ yksikkötangenttivektori pisteessä $(8,4,2)$.

VASTAUS: $\frac{1}{\sqrt{161}}(12\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + \mathbf{k})$.

335.

Laske ruuviviivan $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}$ tangenttivektori pisteessä, joka vastaa parametriarvoa t_0. Laske tähän pisteeseen asetetun ruuviviivan normaalitason yhtälö muodossa $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$. Mikä on tämän tason lyhin etäisyys origosta?

VASTAUS: $-a\sin t_0\,\mathbf{i} + a\cos t_0\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k}$; $\quad -a(\sin t_0)x + a(\cos t_0)y + bz = b^2 t_0$; $\quad b^2|t_0|/\sqrt{a^2+b^2}$.

336.

Määritä neljän desimaalin tarkkuudella ruuviviivan

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \frac{t}{2\pi}\,\mathbf{k}$$

sen pisteen P koordinaatit, joka on lähinnä pistettä $(0,1,0)$. Perustele ääriarvon laatu geometrisen havainnon avulla. Pisteeseen P asetetaan ruuviviivan tangentti; määritä tangentin ja xy-tason leikkauspiste.

VASTAUS:

337.

Osoita, että $\mathbf{r}(t) = a\cosh t\,\mathbf{i} + b\sinh t\,\mathbf{j}$ $(a > 0,\ b > 0)$ esittää hyperbelin toista haaraa. Osoita, että käyrä on sileä ja säännöllinen. Millä parametrin t arvolla käyrän tangentti on y-akselin suuntainen?

VASTAUS: $t = 0$.

338.

Määritä käyrän $\mathbf{r}(t) = a(\cos t + t\sin t)\,\mathbf{i} + a(\sin t - t\cos t)\,\mathbf{j}$ normaalin etäisyys origosta.

VASTAUS: $|a|$.

339.

Piirrä käyrä $\mathbf{r} = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}$.

VASTAUS:

340.

Piirrä käyrä $\mathbf{r}(t) = \cos(5t)\,\mathbf{i} + \sin(6t)\,\mathbf{j}$, $t \in [0, 2\pi]$.

VASTAUS:

341.

Piirrä käyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2+1}{4(1-t)}\,\mathbf{i} + \frac{t}{t+1}\,\mathbf{j}$$

ja määritä sen (suoraviivaiset) asymptootit sekä pisteet, joissa tangentti on vaaka- tai pystysuora.

VASTAUS: Asymptootit $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$;
pystysuora tangentti pisteissä $(\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1), -1/\sqrt{2})$, $(-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1), 1/\sqrt{2})$.

342.

Piirrä käyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1}\,\mathbf{i} + \frac{t}{t^4+1}\,\mathbf{j}$$

ja määritä sen (suoraviivaiset) asymptootit sekä pisteet, joissa tangentti on vaaka- tai pystysuora.

VASTAUS: Asymptootit $y = \pm\frac{1}{2}$; vaakasuora tangentti pisteissä $(-2-\sqrt{3}, \pm\frac{1}{4}\sqrt[4]{27})$, $(1,0)$;
pystysuora tangentti pisteessä $(-1,0)$.

343.

Piirrä käyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t}{1-t^2}\,\mathbf{i} + \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}\,\mathbf{j}$$

ja määritä sen (suoraviivaiset) asymptootit sekä pisteet, joissa tangentti on vaaka- tai pystysuora.

VASTAUS: Asymptootit $x = 0$, $x + y = \pm 2$;
vaakasuora tangentti pisteissä $(1.179, -4.200)$, $(-0.600, -0.337)$, $(0.600, 0.337)$, $-1.179, 4.200)$.

344.

Piirrä käyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathbf{i} + \frac{t^2+1}{t+2}\,\mathbf{j}$$

ja määritä sen (suoraviivaiset) asymptootit sekä pisteet, joissa tangentti on vaaka- tai pystysuora.

VASTAUS: Asymptootit $x = 1$, $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $y = 2$;
vaakasuora tangentti pisteissä $(\frac{1}{4}(2+\sqrt{5}), -4-2\sqrt{5})$, $(\frac{1}{4}(2-\sqrt{5}), -4+2\sqrt{5})$;
pystysuora tangentti pisteessä $(0, \frac{1}{2})$.

345.

Piirrä napakoordinaattikäyrät $r = |\sin n\varphi|$, $n = 1, 2, 3$.

VASTAUS:

346.

Napakoordinaateissa annettu käyrä $r = a(1+\cos\varphi)$ on *kardioidi*. Missä pisteissä käyrän tangentti on x- tai y-akselin suuntainen? Piirrä käyrä.

VASTAUS: x-akselin suuntainen, kun $\varphi = \pi/3$ tai $= 5\pi/3$, y-akselin suuntainen, kun $\varphi = 0$, $= 2\pi/3$ tai $= 4\pi/3$.

347.

Osoita, että kardioidi $r = 1+\cos\varphi$ ja kardioidi $r = 1-\cos\varphi$ leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

VASTAUS:

348.

Määritä suorakulmaiset koordinaatit viiden desimaalin tarkkuudella sille kardioidin $r = 1+\cos\varphi$ pisteelle, joka sijaitsee lähinnä pistettä $x = y = 1$.

VASTAUS:

349.

Tutki napakoordinaattikäyrän $r = a\sin 3\varphi$ pisteeseen osoittavan paikkavektorin ja tähän pisteeseen asetetun tangenttivektorin välistä kulmaa muuttujan φ eri arvoilla. Piirrä käyrä.

VASTAUS: Kulma $= \overline{\text{arc}}\tan(\frac{1}{3}\tan 3\varphi)$.

350.

Arkhimedeen spiraali määritellään napakoordinaattiyhtälöllä $r = a\varphi$. Tutki käyrän pisteeseen osoittavan paikkavektorin ja tähän pisteeseen asetetun tangenttivektorin välistä kulmaa muuttujan φ eri arvoilla. Piirrä käyrä.

VASTAUS: Kulma $= \overline{\text{arc}}\tan\varphi$.

351.

Logaritminen spiraali määritellään napakoordinaattiyhtälöllä $r = ae^{k\varphi}$. Tutki käyrän pisteeseen osoittavan paikkavektorin ja tähän pisteeseen asetetun tangenttivektorin välistä kulmaa muuttujan φ eri arvoilla. Piirrä käyrä sopivilla lukujen a ja k arvoilla.

VASTAUS: Kulma $= \overline{\text{arc}}\tan(1/k)$.

352.

Piirrä Arkhimedeen spiraali $r = \varphi$ ja logaritminen spiraali $r = e^{\varphi}$. Määritä suuntaa $\varphi = \pi$ lähellä olevan käyrien leikkauspisteen napakoordinaatit numeerisesti. Määräytyykö leikkauspiste yksikäsitteisesti em. ehdosta?

VASTAUS:

353.

Piirrä *konkoidi* $r = a\sin^3(\varphi/3)$. Olkoon α käyrän tangenttivektorin ja x-akselin välinen kulma, β käyrän pisteen paikkavektorin ja tähän pisteeseen asetetun tangenttivektorin välinen kulma. Lausu kulmat parametrin φ funktioina ja tutki niiden suhdetta toisiinsa.

VASTAUS:

354.

Yhtälö $x^3 + y^3 - axy = 0$ esittää käyrää, jota kutsutaan *Cartesiuksen lehdeksi*. Johda käyrälle parametriesitys, jossa parametrina on käyrän pisteen ja origon määräämän suoran kulmakerroin t; ts. tee yhtälöön sijoitus $y = xt$. Piirrä käyrä.

VASTAUS: $x = \dfrac{at}{t^3+1}$, $y = \dfrac{at^2}{t^3+1}$.

355.

Johda *Pascalin simpukan* $(x^2 + y^2 - 4x)^2 = 16(x^2 + y^2)$ napakoordinaattiyhtälö ja piirrä käyrä.

VASTAUS: $r = 4(1 + \cos\varphi)$ (kardioidi).

356.

Johda *Bernoulli'n lemniskaatan* $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ napakoordinaattiyhtälö ja piirrä käyrä.

VASTAUS: $r^2 = 2\cos 2\varphi$.

357.

Määritä käyrän $x^2y - xy^2 + 16 = 0$ vaakasuorat ja pystysuorat tangentit implisiittisen derivoinnin avulla. Piirrä käyrä.

VASTAUS: $y = 4$, $x = -4$.

358.

Todista, että yhtälöpari $x = \frac{3}{5}t^3 + t$, $y = e^t$ määrittelee kaikilla arvoilla $x \in \mathbb{R}$ jatkuvan funktion $y = f(x)$. Piirrä funktion kuvaaja sekä määritä sen ääriarvot ja käännepisteet.

VASTAUS:

359.

Tutki, määritteleekö yhtälöpari $x = t - \sin t \cos t$, $y = t^2$ funktion $y = f(x)$.

VASTAUS:

360.

Laske yhtälöparin $x = t - \sin t \cos t$, $y = t^2$ määrittämän funktion $y = f(x)$ ensimmäinen ja toinen derivaatta parametrin t funktiona.

VASTAUS:

361.

Osoita, että yhtälöiden

$$x = \frac{1 + \ln t}{t^2}, \quad y = \frac{3 + 2\ln t}{t} \qquad (t > 0)$$

määrittämä funktio $y(x)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$y\frac{dy}{dx} = 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1.$$

Piirrä funktion $y(x)$ kuvaaja. Millä muuttujan x arvoilla funktio on määritelty? Mitä muuta funktiosta voidaan sanoa?

VASTAUS: Funktiolla on kaksi haaraa: toinen on määritelty arvoilla $x \le e/2$, toinen arvoilla $0 < x \le e/2$.

362.

Olkoon $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = \sqrt{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\mathbf{b} = \sqrt{3}(\mathbf{i} - \mathbf{k})$. Tutki, minkälainen käyrä on

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + (\cos t)\mathbf{a} + (\sin t)\mathbf{b}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Mitä käyriä ovat tämän käyrän ortogonaaliprojektiot koordinaattitasoille?

VASTAUS:

363.

Tutki, millainen avaruuskäyrä on kyseessä, kun

$$\mathbf{r}(t) = \ln(t+1)\,(\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}) + \overline{\text{arc}}\tan t\,\mathbf{k}, \quad t \ge 0.$$

Piirrä käyrän projektiot koordinaattitasoille.

VASTAUS:

364.

Tutki heittoliikettä: Miten lähtönopeuden muutos vaikuttaa heittoetäisyyteen ja lentoradan maksimikorkeuteen?

VASTAUS:

365.

Osoita, että vinossa heittoliikkeesä heittoetäisyys on suurimmillaan, kun korotuskulma on 45°.

VASTAUS:

366.

Liikkuvan partikkelin paikkavektori $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ toteuttaa yhtälön

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{r}^0,$$

missä **a** ja **b** ovat vakiovektoreita. Osoita, että **r** toteuttaa myös yhtälön

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{a} + |\mathbf{r}|\mathbf{b}) = \lambda \mathbf{r}^0,$$

missä λ on eräs vakio. Määritä λ.

VASTAUS: $\lambda = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

367.

xy-koordinaatistossa tarkoitetaan *rajoitetulla tangentilla* (*rajoitetulla normaalilla*) käyrän pisteen ja x-akselin välisen tangentin (normaalin) osan pituutta ja *alitangentilla* (*alinormaalilla*) em. janan x-akselilla olevan projhektion pituutta. Napakoordinaatistossa määritellään muuten samoin, mutta x-akseli korvataan origon kautta kulkevalla paikkavektoria vastaan kohtisuoralla suoralla (joka siis muuttuu pisteen kulkiessa pitkin käyrää). Johda lausekkeet em. käsitteille.

VASTAUS: xy-koordinaatistossa rajoitettu tangentti $\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}$, alitangentti $\left|\frac{y}{y'}\right|$,
rajoitettu normaali $|y|\sqrt{1+y'^2}$, alinormaali $|yy'|$;
napakoordinaatistossa vastaavasti $\frac{r}{|r'|}\sqrt{r^2+r'^2}$, $\frac{r^2}{|r'|}$, $\sqrt{r^2+r'^2}$, $|r'|$.

8.3. Polynomikäyrät