

10. Integroimistekniikkaa

10.1. Integraalifunktio

388.

Vertaa funktioiden a) $\ln x$ ja $\ln 10x$, b) $\overline{\arctan} x$ ja $\overline{\arctan} \frac{x+k}{1-kx}$, c) $\ln(x + \sqrt{x^2 - a})$ ja $-\ln(x - \sqrt{x^2 - a})$, missä $a > 0$, derivaattoja toisiinsa. Tutki funktioiden erotusta muuttujan eri arvoilla.

VASTAUS: a) Yhteinen derivaatta $1/x$; erotus $-\ln 10$; b) yhteinen derivaatta $1/(1+x^2)$; tapauksessa $k > 0$ erotus on $-\overline{\arctan} k$, jos $x < 1/k$, ja $\pi - \overline{\arctan} k$, jos $x > 1/k$; tapauksessa $k = 0$ erotus on 0 ; tapauksessa $k < 0$ erotus on $-\pi - \overline{\arctan} k$, jos $x < 1/k$, ja $-\overline{\arctan} k$, jos $x > 1/k$; c) yhteinen derivaatta $1/\sqrt{x^2 - a}$; erotus $\ln a$.

389.

Sievennä lauseke $\overline{\arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$ muodostamalla ensin sen derivaatta.

VASTAUS:

390.

Määritä se funktion $2x - 3$ integraalifunktio, jonka kuvaaja sivuaa suoraa $x + y = 0$.

VASTAUS: $x^2 - 3x + 1$.

391.

Käyrä $y = f(x)$ kulkee pisteen $(3, 1)$ kautta ja jokaisessa pisteessä $(x, f(x))$ tangentin kulmakerroin on $x^2 + 2x$. Määritä käyrän yhtälö.

VASTAUS: $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 17$.

392.

Onko funktiolla $|x|$ integraalifunktiota, joka on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$?

VASTAUS: On; $\frac{1}{2}x|x| + C$.

393.

Määritä se funktion $f(x) = x + |x|$ integraalifunktio F , joka toteuttaa ehdon $F(1) = 2$. Todenna, että $F'(0) = f(0)$. Laske $F(-2)$.

VASTAUS: $F(x) = \frac{1}{2}x(x + |x|) + 1$; $F(-2) = 1$.

394.

Määritä seuraavien funktioiden integraalifunktiot a) käsin laskulla, b) jotakin tietokoneohjelmaa käyttäen:

a) $x^3 \sqrt[3]{x}$,	b) $\frac{(x^2 - 1)^3}{x}$,	c) $\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}$,
d) $\sqrt{2 - 5x}$,	e) $(3x - 7)^{413}$,	f) $(2x^2 - 5x + 7)(4x - 5)$,
g) $\frac{x^2}{(1 + x^3)^4}$,	h) $\frac{\sqrt{5}(x + 1)}{\sqrt{5x^2 + 10x + 1}}$,	i) $\sin x \sin 2x$,
j) $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$,	k) $\frac{\cos x}{\sin^4 x}$,	l) $\frac{\ln x}{x}$,
m) $\frac{1}{x \ln x}$,	n) $e^x \sqrt{1 + e^x}$,	o) $\frac{1}{e^x}$,
p) $e^{3x} + \sqrt{e^x}$,	q) $\frac{e^x}{1 + e^x}$,	r) $\frac{e^x}{1 + e^{2x}}$,
s) $\frac{5 + x}{x^2 + 10x}$,	t) $\frac{1 - x}{x^2 - 2x + 2}$,	u) $\frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}$,
v) $\frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}}$,	w) $\frac{x + 1}{x^2 + 1}$,	x) $\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$,
y) $\frac{1}{\sin^2(2x + 1)}$,	z) $\frac{x^2}{\cos^2(5x^3 - 2)}$,	â) $\sinh^2 x$,
ä) $\cosh^2 x$,	ö) $\frac{\operatorname{arsinh} x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.	

VASTAUS:

395.

Etsi seuraaville funktioille f annetun ehdon täyttävä integraalifunktio F :

a) $f(x) = 4 \sin x \cos x - \frac{1}{\cos^2 x}$,	$F(0) = 2$,
b) $f(x) = \frac{2}{3 - 4x}$,	$F\left(\frac{3 - e}{4}\right) = 0$,
c) $f(x) = -\frac{\pi}{x^2} \cos \frac{\pi}{x}$,	$F(1) = 0$.

VASTAUS:

396.

Laske seuraavat määrätyt integraalit:

a) $\int_3^5 \frac{x}{x^2 - 4} dx$,	b) $\int_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x}}$,	c) $\int_0^{3a} \frac{x^2 - 3ax}{x - 4a} dx \quad (a \neq 0)$.
--------------------------------------	---	---

VASTAUS:

10.2. Sijoitusmenettely

397.

Suorita jokin sopivalta tuntuva sijoitus, kun integroitava on muotoa

a) $\frac{f(\ln x)}{x}$,	b) $f(\cos x) \sin x$,	c) $f(\tan x) \cos^2 x$,	d) $f(ae^x + b)e^x \quad (a, b \text{ vakioita})$.
---------------------------	-------------------------	---------------------------	---

Miten integraali muuntuu kussakin tapauksessa?

VASTAUS:

398.

Laske seuraavat integraalit sijoitusta käyttäen:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^3}, & \text{b) } \int \frac{x^2 dx}{(ax^3 + b)\sqrt{ax^3 + b}}, & \text{c) } \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx, \\ \text{d) } \int (1 + \tan^2 x)\sqrt{\tan x} dx, & \text{e) } \int \frac{dx}{(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}, & \text{f) } \int \frac{dx}{(\arctan x)(1+x^2)}, \\ \text{g) } \int \frac{dx}{\sqrt{6-x^2}}, & \text{h) } \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}. \end{array}$$

VASTAUS:

399.

Laske integraali

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

a) sijoituksella $x = 1/t$, b) sijoituksella $x = a \tan t$, c) sijoituksella $x = a \sinh t$.

VASTAUS:

400.

Etsi funktion $1/\cosh x$ integraalifunktio a) sijoituksella $t = e^x$, b) sijoituksella $t = \tanh \frac{x}{2}$. Vertaa saatuja integraalifunktioita.

VASTAUS:

401.

Määritä ne funktion

$$\frac{e^x}{4 + (e^x + 1)^2}$$

integraalifunktiot, joiden kuvaajilla on asymptootina x-akseli.

VASTAUS: $\frac{1}{2}(\arctan \frac{e^x+1}{2} - \arctan \frac{1}{2})$, $\frac{1}{2} \arctan \frac{e^x+1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

402.

Muodosta sijoitusmenettelyä käyttäen seuraavista integraaleista kustakin kolme uutta integraalia, jotka eivät ole integroitavissa alkeisfunktioiden avulla:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \text{b) } \int e^{x^2} dx, \quad \text{c) } \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \text{d) } \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \text{e) } \int \frac{dx}{\ln x}.$$

VASTAUS:

403.

Laske seuraavat määrätyt integraalit sijoitusta käyttäen:

$$\text{a) } \int_0^3 \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{1+x}} dx, \quad \text{b) } \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$$

VASTAUS: a) 52/5; b) 2.

404.

Osoita, että jos f on jatkuva funktio ja $a < b$, niin integraali $\int_a^b f(x) dx$ voidaan muuntaa muotoa $x = At + B$ olevalla sijoituksella integraaliksi, jonka rajat ovat α ja β . Suorita muuntaminen.

VASTAUS: $A = \frac{b-a}{\beta-\alpha}$, $B = \frac{a\beta-b\alpha}{\beta-\alpha}$; $A \int_{\alpha}^{\beta} f(At+B) dt$.

405.

Osoita, että jos f on jatkuva funktio, niin

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$

VASTAUS: Sijoitus $x = a + b - t$.

406.

Todista, että jos f jatkuva funktio, jolla on jaksona ω , niin

$$\int_a^{a+\omega} f(x) dx = \int_0^{\omega} f(x) dx.$$

VASTAUS:

407.

Määritä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}.$$

VASTAUS: $\pi/6$.

10.3. Osittaisintegrointi

408.

Laske osittaisintegroinnilla

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \overline{\arctan} x dx, & \text{b) } \int x^2 \cos x dx, & \text{c) } \int x^3 e^{-x} dx, \\ \text{d) } \int x \cosh x dx, & \text{e) } \int x \ln^2 x dx, & \text{f) } \int x \sqrt{ax+b} dx, \\ \text{g) } \int \frac{x}{\cos^2 x} dx, & \text{h) } \int \frac{\overline{\arcsin} x}{\sqrt{1+x}} dx, & \text{i) } \int x \overline{\arctan} x dx. \end{array}$$

VASTAUS:

409.

Laske osittaisintegroinnilla

$$\text{a) } \int e^{\sqrt{x}} dx, \quad \text{b) } \int \sin \sqrt[3]{x} dx, \quad \text{c) } \int \frac{\overline{\arctan} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

VASTAUS:

410.

Laske a) $\int \operatorname{arsinh} x dx$, b) $\int \operatorname{arcosh} x dx$, c) $\int \operatorname{artanh} x dx$.

VASTAUS:

411.

Laske $\int \cos^2 x dx$ a) osittaisintegroinnilla, b) soveltamalla sopivaa trigonometrian kaavaa.

VASTAUS:

412.

Määritä $\int x^\alpha \ln x dx$ kaikilla arvoilla $\alpha \in \mathbb{R}$.

VASTAUS:

413.

Muodosta osittaisintegroinnilla seuraavista integraaleista uusi integraali, joka ei ole laskettavissa alkeisfunktioiden avulla:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \text{b) } \int e^{x^2} dx, \quad \text{c) } \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \text{d) } \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \text{e) } \int \frac{dx}{\ln x} dx.$$

VASTAUS:

414.

Laske seuraavat määrätyt integraalit:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x dx, & \text{b) } \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx, & \text{c) } \int_0^{2\pi} |x \sin x| dx, \\ \text{d) } \int_0^{1/3} \operatorname{arctan}(3x) dx, & \text{e) } \int_0^{1/2} x \operatorname{arcsin} x dx, & \text{f) } \int_0^1 x^2 e^{3x} dx, \\ \text{g) } \int_1^2 (x-1)^2 \ln x dx, & \text{h) } \int_1^2 x \ln^2 x dx, & \text{i) } \int_0^{\ln 2} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx. \end{array}$$

VASTAUS:

415.

Johda palautuskaava integraalille

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

VASTAUS:

416.

Johda palautuskaava integraalille

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

VASTAUS:

417.

Johda osittaisintegroinnilla palautuskaava määrätyle integraalille

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

VASTAUS: $I_0 = \pi/2, I_1 = 1; I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}, n \geq 2.$

418.

Mitkä rajat saadaan luvulle $\int_0^1 f(x) dx$, kun tiedetään, että f ja sen derivaatta ovat jatkuvia integroimisvälillä, $f(1) = 1$ ja $|f'(x)| \leq e^{x^2}$ integroimisvälillä?

VASTAUS: Integraalin arvo on välillä $[\frac{3-e}{2}, \frac{1+e}{2}]$.

10.4. Rationaalifunktioiden integrointi; osamurtokehitemä

419.

Integroi seuraavat rationaalifunktiot:

a) $\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x+2)^3},$	b) $\frac{x}{2x^2 - 3x - 2},$	c) $\frac{24}{x(x^2 - 1)(x^2 - 4)},$
d) $\frac{1}{(1-x)^2(1+x)},$	e) $\frac{3x^2 + 1}{(x^2 - 1)^3},$	f) $\frac{x^8 + 1}{x^6 + x^4},$
g) $\frac{3+x-2x^3}{1-x^3},$	h) $\frac{x^4 + 5}{x^4 - 4x + 3},$	i) $\frac{1}{(x^2 + 1)^3},$
j) $\frac{x^2 + 5}{2x^2 - 2x + 5},$	k) $\frac{x^5 + 4}{(x^2 + 2)^2},$	l) $\frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)},$
m) $\frac{x^3 + 4x^2 + 6x}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2}.$		

VASTAUS:

420.

Laske integraalit

a) $\int \frac{x^5 dx}{(x^2 + 2)^2},$	b) $\int \frac{dx}{x^4(x^3 + 1)^2},$	c) $\int \frac{x^3 + 1}{x(x^3 - 8)} dx.$
---------------------------------------	--------------------------------------	--

VASTAUS:

421.

Jaa polynomi $x^4 + 4$ enintään toista astetta oleviin reaalisiin tekijöihin ja laske tätä hyväksi käyttäen integraali

$$\int \frac{8}{x^4 + 4} dx.$$

VASTAUS:

422.

Laske integraali

$$\int \frac{dx}{x^4 - 1}.$$

VASTAUS:

423.

Muodosta osamurtokehitelmä ja laske integraalifunktio lausekkeelle

$$\frac{x^4 + 1}{(x - 1)(x^3 + 1)}.$$

VASTAUS:

424.

Muodosta osamurtokehitelmä rationaalifunktiolle

$$\frac{2x^4 + 7x^3 + 11x^2 + 6x - 1}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)^2}$$

ja laske integraalifunktio.

VASTAUS:

425.

Laske integraali

$$\int \frac{x + 1}{(x^2 - x + 1)^{10}} dx.$$

VASTAUS:

426.

Muodosta osamurtokehitelmä lausekkeelle

$$\frac{4696 - 11076x + 11290x^2 - 6227x^3 + 1687x^4 + 180x^5 - 364x^6 + 156x^7 - 36x^8 + 4x^9}{-1152 + 2496x - 2528x^2 + 1616x^3 - 704x^4 + 208x^5 - 40x^6 + 4x^7}.$$

Lisää tämän jälkeen lausekkeen nimittäjään 1 ja muodosta osamurtokehitelmä uudelleen.

VASTAUS:

427.

Laske

$$\int \frac{dx}{x(x^3 + 8)}$$

a) muodostamalla osamurtokehitelmä, b) suorittamalla ensin sopiva sijoitus.

VASTAUS:

428.

Olkoon $a < b$. Määritä se funktion

$$\frac{b - a}{(x - a)(b - x)}$$

integraalifunktio, joka kohdassa $\frac{1}{2}(a+b)$ saa arvon 0.

VASTAUS: $\ln \left| \frac{x-a}{b-x} \right|$.

429.

Laske kaikilla arvoilla $a \in \mathbb{R}$ integraali

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)(x-a)}.$$

VASTAUS:

10.5. Esimerkkejä integroinnista

430.

Johda osittaisintegroinnilla palautuskaava integraalille

$$C_n = \int \cos^n x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Laske myös C_0 ja C_1 .

VASTAUS:

431.

Olkoon

$$C_n = \int \cos^n x dx.$$

Johda kaavat

$$C_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} C_{n-2}, \quad n \neq 0,$$
$$C_{n-2} = -\frac{1}{n-1} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n}{n-1} C_n, \quad n \neq 1.$$

Miten näiden avulla saadaan integraalit C_n , $n \in \mathbb{Z}$, lasketuiksi?

VASTAUS:

432.

Johda sijoitusta $t = \tan x$ käyttäen palautuskaava integraalille

$$I_n = \int \tan^n x dx, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Laske erikseen I_0 ja I_1 sekä palautuskaavan avulla I_5 .

VASTAUS:

433.

Laske seuraavat integraalit:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \sin^7 x dx, & \text{b) } \int \frac{dx}{\cos^4 x}, & \text{c) } \int \cos^6 x dx, \\ \text{d) } \int \frac{dx}{\cos^5 x}, & \text{e) } \int \sin^2 4x \cos^2 4x dx, & \text{f) } \int \sin^2 3x \sin^2 5x dx, \\ \text{g) } \int \frac{\cos 3x}{\sin x} dx, & \text{h) } \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx, & \text{i) } \int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cos^3 x dx, \\ \text{j) } \int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx, & \text{k) } \int \frac{dx}{\sqrt[6]{\sin^5 x \cos^7 x}}, & \text{l) } \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx. \end{array}$$

VASTAUS:

434.

Laske integraalit

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx, & \text{b) } \int \frac{\sin^2 x}{1 - \tan x} dx, & \text{c) } \int \frac{\cos^8 x}{\sin^4 x} dx, \\ \text{d) } \int \frac{dx}{4 - 3 \cos^2 x + 5 \sin^2 x} dx, & \text{e) } \int \frac{\cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx. & \end{array}$$

VASTAUS:

435.

Muunna integraali

$$\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$$

sijoituksella $t = \tan \frac{x}{2}$ ja laske se. Piirrä integraalifunktion kuvaaja. Onko tämä jatkuva?

VASTAUS:

436.

Laske

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 4 \sin x}.$$

VASTAUS:

437.

Laske integraalit

$$\text{a) } \int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx, \quad \text{b) } \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x} dx.$$

VASTAUS:

438.

Olkoon $a > 0$, $b > 0$. Laske

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x}.$$

VASTAUS:

439.

Laske kaikilla arvoilla $a \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{1 + a \cos^2 x}.$$

VASTAUS:

440.

Olkoon $(a, b) \neq (0, 0)$. Laske

$$\text{a) } \int \frac{dx}{a + b \tan x}, \quad \text{b) } \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}.$$

VASTAUS:

441.

Laske kaikilla arvoilla $a, b \in \mathbb{R}$

$$\text{a) } \int \cos ax \cos bx dx, \quad \text{b) } \int \sin ax \cos^2 bx dx.$$

VASTAUS:

442.

Millä kokonaisluvun n arvoilla integraalit $\int \sinh^n x dx$ ja $\int \cosh^n x dx$ palautuvat polynomin integroimiseen? Mil-laista sijoitusta tällöin on käytettävä? Laske sovellutuksena

$$\text{a) } \int \sinh^5 x dx, \quad \text{b) } \int \cosh^7 x dx, \quad \text{c) } \int \frac{dx}{\sinh^6 x}, \quad \text{d) } \int \frac{dx}{\cosh^4 x}.$$

VASTAUS: n positiivinen ja pariton tai negatiivinen ja parillinen.

443.

Laske seuraavat integraalit:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int \frac{dx}{(1 + \cosh x)^2}, & \text{b) } \int \tanh^3 x dx, & \text{c) } \int \frac{dx}{\sinh x \cosh x}, & \text{d) } \int \cosh^4 x dx, \\ \text{e) } \int \frac{dx}{\sinh^5 x}, & \text{f) } \int \cosh^2 x \sinh^4 x dx, & \text{g) } \int \coth^2 x dx, & \text{h) } \int \frac{\sinh^3 x}{\sqrt{\cosh x}} dx. \end{array}$$

VASTAUS:

444.

Laske palauttamalla eksponenttifunktion

$$\text{a) } (\cosh x + \sinh x) \sqrt{\cosh x - \sinh x} dx, \quad \text{b) } \frac{\cosh^3 x - \sinh^3 x}{\cosh^3 x + \sinh^3 x} dx.$$

VASTAUS:

445.

Laske integraali

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx.$$

VASTAUS:

446.

Laske integraali

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}.$$

Anna vastaus logaritmfunktion avulla.

VASTAUS:

447.

Laske seuraavat integraalit:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx, & \text{b) } \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}, & \text{c) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx, \\ \text{d) } \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx, & \text{e) } \int \frac{\sqrt[6]{x}}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})} dx, & \text{f) } \int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-x^2}}, \\ \text{g) } \int \frac{x^4}{\sqrt{1-2x^2}} dx, & \text{h) } \int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+x+1}} dx, & \text{i) } \int \frac{x+a}{\sqrt{x(x-2a)}} dx, \\ \text{j) } \int \frac{2x+3}{\sqrt{-x^2+x+6}} dx, & \text{k) } \int \frac{x}{\sqrt{(2x-3)(4-x)}} dx. \end{array}$$

VASTAUS:

448.

Laske seuraavat määrättyt integraalit:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx, & \text{b) } \int_{-3/2}^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx, & \text{c) } \int_0^1 \sqrt{x^2 - x + 1} dx, \\ \text{d) } \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx, & \text{e) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \cos x + 3}, & \text{f) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (ab \neq 0). \end{array}$$

VASTAUS:

449.

Sievennä funktio

$$f(x) = \int_{-x/2}^{x/2} \frac{dt}{(x^2 - t^2)^{3/2}} \quad (x \neq 0)$$

ja piirrä sen kuvaaja.

VASTAUS: $f(x) = 2/(\sqrt{3}x|x|)$.

450.

Muotoa

$$I = \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

oleva integraali, missä $P_n(x)$ on astetta n oleva polynomi, voidaan laskea kirjoittamalla

$$I = (A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_n)\sqrt{ax^2 + bx + c} + A_{n+1} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Osoita, että kertoimet A_k voidaan määrätä yksinomaan polynomien yhtäsuuruutta koskevasta ehdosta, joka saadaan asettamalla edellä olevien lausekkeiden derivaatat yhtä suuriksi. Sovella menetelyä seuraavien integraalien laskemiseen:

$$\text{a) } \int \frac{3x^2 - 5x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx, \quad \text{b) } \int \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx.$$

VASTAUS:

451.

Palauta annetuilla sijoituksilla integraalit

$$\text{a) } \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} dx, \quad x-1 = \frac{1}{t},$$

$$\text{b) } \int \frac{dx}{x^3\sqrt{2x^2+2x+1}} dx, \quad x = \frac{1}{t}$$

edellisessä tehtävässä käsiteltyyn muotoon ja laske ne.

VASTAUS:

452.

Palauta integraali

$$\int \frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}} dx$$

edellisessä tehtävässä käsiteltyyn tyyppiin muodostamalla ensin osamurtokehitelemä funktiolle $x/(x^2-1)$. Laske integraali.

VASTAUS:

453.

Laske $\int (\ln x)^n dx$ kaikille $n \in \mathbb{N}$.

VASTAUS: $n!x \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} (\ln x)^k / k! + C$.

454.

Laske integraalit

$$\text{a) } \int \frac{x^5}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} dx, \quad \text{b) } \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^n}}, \quad \text{c) } \int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}},$$

$$\text{d) } \int \frac{dx}{x^7\sqrt{x^4-1}}, \quad \text{e) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}} dx.$$

VASTAUS: a) $\frac{3}{28}(2x^4 + 3x^2 + 9)\sqrt[3]{x^2-1} + C$;

b) jos $b \neq 0$, $a > 0$, niin $1/(n\sqrt{a}) [\ln|\sqrt{a+bx^n} - \sqrt{a}| - \ln(\sqrt{a+bx^n} + \sqrt{a})] + C$;

jos $b \neq 0$, $a = 0$, niin $-2/(n\sqrt{bx^n}) + C$;

jos $b \neq 0$, $a < 0$, niin $2/(v\sqrt{-a}) \arctan(\sqrt{a+bx^n}/\sqrt{-a}) + C$;

jos $b = 0$, $a \neq 0$, niin $\ln|x|/\sqrt{a} + C$;

c) $(8x^4 + 4x^2 + 3)\sqrt{x^2-1}/(15x^5) + C$;

- d) $(2x^4 + 1)\sqrt{x^4 - 1}/(6x^6) + C$;
 e) $-\frac{2}{3}\arctan(\sqrt{a^3 - x^3}/(x\sqrt{x})) + C$.

455.

Laske integraalit

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^7(x+1)^2}}, & \text{b) } \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}, \\ \text{c) } \int \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} dx, & \text{d) } \int \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}} dx. \end{array}$$

VASTAUS: a) $\frac{3(3x-5)}{16(x-1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C$; b) $\frac{32x^3+48x^2+60x+22}{27(x^2+x+1)^{3/2}} + C$;
 c) $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + C$; d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1} + C$.

456.

Laske integraalit

$$\text{a) } \int \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) dx, \quad \text{b) } \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx, \quad \text{c) } \int (1+x^2)^2 \arctan x dx.$$

VASTAUS: a) $x\ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) + \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x + C$; b) $-\frac{\arcsin x}{x} - \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|} + C$;
 c) $(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5)\arctan x - \frac{1}{20}x^4 - \frac{7}{30}x^2 - \frac{4}{15}\ln(1+x^2) + C$.

457.

Tutki, voidaanko seuraavat funktiot integroida alkeisfunktioiden avulla:

$$\text{a) } \frac{xe^x}{(x+1)^2}, \quad \text{b) } \frac{e^x}{x}.$$

VASTAUS:

458.

Tutki, voidaanko seuraavat funktiot integroida alkeisfunktioiden avulla:

$$\text{a) } \frac{\sin x}{x}, \quad \text{b) } \frac{\cos x}{x}.$$

VASTAUS: