1. Vektorimuuttujan funktiot

1.1. Avaruus $\mathbb{R}^n$

1.

Todista Cauchyn – Буняковский'n – Schwarzin epäyhtälö avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

VASTAUS:

2.

Tutki, onko joukko

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\, (x,y) \in \mathbb{R} \mid x \in [0,1],\ y = \tfrac{1}{k} \,\}.$$

kompakti, ts. rajoitettu ja suljettu.

VASTAUS:

3.

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ joukon kompaktisuuden määritelmänä pidettäköön sitä, että se on suljettu ja rajoitettu; joukko olkoon suljettu, jos sen komplementti on avoin; joukko olkoon avoin, jos sen jokainen piste on sisäpiste. Sisäpiste on piste, jolla on jokin ympäristö, joka kokonaisuudessaan sisältyy joukkoon. Joukon kasautumispiste on piste, jonka jokaisessa ympäristössä on muitakin joukon pisteitä kuin kasautumispiste itse (jonka ei edes tarvitse kuulua joukkoon). Osoita, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti, jos ja vain jos sen jokaisella äärettömän monen alkion osajoukolla on kasautumispiste joukossa A.

VASTAUS:

1.2. Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

4.

Todista, että seuraavilla kahden reaalimuuttujan reaaliarvoisilla funktioilla on raja-arvo origossa ja määritä tämä:

$$\text{a)}\ \frac{(1+y^2)\sin x}{x}, \qquad \text{b)}\ \frac{x\tan y}{y}.$$

VASTAUS: a) 1; b) 0.

5.

Olkoon funktiolla $\mathbf{f} : E^3 \to E^3$ raja-arvo

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \neq \mathbf{o}.$$

Todista raja-arvon määritelmään perustuen, että

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r})}{|\mathbf{f}(\mathbf{r})|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

VASTAUS: Arvioi etäisyyttä $|\mathbf{f}(\mathbf{r})/|\mathbf{f}(\mathbf{r})| - \mathbf{a}/|\mathbf{a}||$ samalla tavoin kuin todistettaessa osamäärän raja-arvoa koskevaa lausetta yhden muuttujan funktioille.

6.

Todista suoraan raja-arvon määritelmään perustuen, että funktio $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x+y,xy)$, on jatkuva pisteessä $(1,1)$.

VASTAUS:

7.

Funktio $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ olkoon jatkuva pisteessä (x_0,y_0,z_0). Määritellään funktio $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ asettamalla $g(x,y)=f(x,y,z_0)$. Todista, että g on jatkuva pisteessä (x_0,y_0).

VASTAUS: Käytä $\varepsilon\delta$-tekniikkaa ja tarkastele etäisyyttä $|g(x,y)-g(x_0,y_0)|$.

8.

Määrittele tasainen jatkuvuus funktiolle $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Tutki, ovatko funktiot a) $f(x,y)=3x+5y$, b) $f(x,y)=xy$ tasaisesti jatkuvia määrittelyjoukossa $\mathbb{R}^2$.

VASTAUS:

1.3. Esimerkkejä vektorimuuttujan funktioista

9.

Millä muuttujien arvoilla seuraavat kahden muuttujan reaaliarvoiset funktiot $f(x,y)$ ovat määriteltyjä? Piirrä näiden kuvaajat.

$$\text{a) } x^2-y^2, \quad \text{b) } x^y-y^x, \quad \text{c) } \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \text{d) } \frac{xy}{x^2-y^2}.$$

VASTAUS:

10.

Piirrä korkeuskäyräkuvat edellisen tehtävän funktioiden kuvaajista.

VASTAUS:

11.

Piirrä kahden muuttujan funktion

$$f(x,y)=xe^{-(x^2+y^2)}$$

kuvaaja (pinta), kun $-3\le x\le 3,\ -3\le y\le 3$.

VASTAUS:

12.

Tutki funktion $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ kuvaajaa piirtämällä sen tasa-arvokäyriä $f(x,y)=\text{vakio}$. Mikä käyrä saadaan, jos vakio $=0$?

VASTAUS:

13.

Piirrä kuvaaja funktiolle

$$f(x,y)=\overline{\text{arc}}\tan\frac{y}{x}, \quad x\neq 0.$$

Mitä arvoja funktio saa origon ympäristössä? Miten funktion kuvaajan muodostamaa pintaa voisi kuvata?

VASTAUS:

14.

Tarkastellaan pintaa $z = xy^2(1-x)^y$, $0 \le x \le 1$, $y \ge 0$. Piirrä pinnan ja tasojen $y =$ vakio leikkauskäyriä. Miten leikkauskäyrät $z = f_y(x)$ käyttäytyvät, kun $y \to \infty$? Onko olemassa rajafunktiota $z = f(x) = \lim_{y\to\infty} f_y(x)$?

VASTAUS:

15.

Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Piirrä lähtöjoukon suorakulmainen koordinaattiruudusto ja tämän kuva maalijoukossa. Onko kuvaus bijektio?

VASTAUS: Kuvaus ei ole injektio.

16.

Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ määritellään asettamalla

$$(u,v) = f(x,y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y).$$

Lähtötasoa voidaan kutsua xy-tasoksi, maalitasoa uv-tasoksi. Tutki, millaiseksi uv-tason kuvioksi kuvautuu xy-tason neliö $\{\,(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\,\}$.

VASTAUS: Ympyrärenkaan sektoriksi.

17.

Muodosta xy-tason suorakulmainen pistehila ja piirrä sen kuva. Kuvaa hila tämän jälkeen funktiolla $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$ ja piirrä kuvahila. Millaisesta kuvauksesta f on kysymys?

VASTAUS:

18.

Olkoot $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kuvauksia:

$$f(\underset{2\times 1}{x}) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \qquad g(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Muodosta yhdistetyn funktion $f \circ g$ lauseke.

VASTAUS: $e^x\ (\cos x + 2\sin y,\ 3\cos x + 4\sin y,\ 5\cos x + 6\sin y)$.

19.

Koko avaruuden täyttävä neste kiertää z-akselin ympäri siten, että nestehiukkasen kulmanopeus on suoraan verrannollinen sen z-koordinaatin neliöön. Muodosta vektorimuuttujan vektoriarvoinen funktio, joka esittää nestehiukkasen nopeusvektoria sen paikan funktiona. (Tällaista funktiota kutsutaan *vektorikentäksi*; jokaiseen avaruuden pisteeseen tai oikeammin sen paikkavektoriin $\mathbf{r}$ liittyy kentän vektori $\mathbf{f}(\mathbf{r})$).

VASTAUS: $\alpha z^2(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, missä α on verrannollisuuskerroin.

20.

Robotin tasossa liikkuva käsivarsi muodostuu kahdesta vivusta, joista edellinen on kiinnitetty toisesta päästä origoon ja toiseen on nivelletty jälkimmäinen vipu. Vipujen pituudet ovat a ja b. Käsivartta ohjataan säätämällä edellisen vivun suuntakulmaa φ ja vipujen välistä kulmaa ψ. Lausu käsivarren vapaan pään koordinaatit (x,y) ohjauskulmien funktiona. Vastaako jokaista vapaan pään asemaa yksikäsitteiset ohjauskulmien arvot?

VASTAUS:

21.

Tason *käänteissäteinen muunnos* (*inversio*) on kuvaus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Pisteen $P \,\widehat{=}\, (x,y)$ kuvaksi asetetaan piste $P' \,\widehat{=}\, (x',y')$ siten, että P ja P' sijaitsevat samalla origosta O alkavalla säteellä ja etäisyyksille pätee $|OP|\,|OP'| = 1$. Johda kuvauksen komponenttifunktioiden lausekkeet.

VASTAUS:

22.

Eräässä karttaprojektiossa ajatellaan kiedottavaksi lieriö maapallon ympäri siten, että se sivuaa palloa päiväntasaajaa pitkin. Pallon pinnan piste projisioidaan lieriölle keskusprojektiolla, jonka keskus on maapallon keskipisteessä. Lopuksi lieriö leikataan auki jotakin meridiaanin kuvaa pitkin ja levitetään tasokartaksi. Johda lausekkeet sille kuvaukselle $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka kuvaa maantieteelliset pallokoordinaatit suorakulmaisiksi karttakoordinaateiksi. Oletetaan, että lieriö on leikattu auki meridiaania 180° pitkin ja karttakoordinaattien origo on kartan vasemmassa laidassa keskellä. Kartan mittakaava olkoon $1 : d$ päiväntasaajalla.

VASTAUS: $x = \frac{\pi R}{180 d}(\varphi + 180)$, $y = \frac{R}{d}\tan\vartheta$ (kulmat asteissa, maantieteelliset pallokordinaatit, R maapallon säde).