# 4. Vektoriarvoiset funktiot

## 4.1. Differentioituvuus

# 127.

Olkoot $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ differentioituvia funktioita. Todista differentiaalikehitelmää käyttäen, että myös summa $f+g$ on differentioituva ja

$$d(f+g) = df + dg.$$

VASTAUS:

# 128.

Laske seuraavien vektorimuuttujan vektoriarvoisten funktioiden Jacobi'n matriisit:

$$\text{a) } f(x,y,z) = (\frac{x}{y},\ 2y+1,\ xz^2), \qquad \text{b) } f(x,y,z) = (xe^{-yz},\ \frac{y}{x}+\frac{z}{y},\ \sqrt{x}z^2).$$

VASTAUS: a) $\begin{pmatrix} 1/y & -x^2/y & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2xz \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} e^{-yz} & -xze^{-yz} & -xye^{-yz} \\ -y/x^2 & 1/x - z/y^2 & 1/y \\ z^2/(2\sqrt{x}) & 0 & 2\sqrt{x}z \end{pmatrix}$.

# 129.

Etsi vektorimuuttujan vektoriarvoisen funktion

$$f(x,y,z) = (x^2+yz,\ 2ze^x,\ x\ln y)$$

Jacobi'n matriisi. Laske funktion differentiaali pisteessä $(0,1,-2)$, kun $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.1$.

VASTAUS:

# 130.

Linearisoi funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^3y^5 - 1,\ x^7 + y^7 - 5)$, ts. laske sen differentiaali.

VASTAUS: $df(x,y,h,k) = (3x^2y^5h + 5x^3y^4k,\ 7x^6h + 7y^6k)$.

# 131.

Funktiot $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ määritellään seuraavasti:

$$f(x) = \underset{n\times n}{A}\, x + \underset{n\times 1}{b}, \qquad g(x) = x^{\mathrm{T}} \underset{n\times n}{A}\, x.$$

Määritä funktioiden derivaatat, so. Jacobi'n matriisit.

VASTAUS: $J_f(x) = A$, $J_g(x) = x^{\mathrm{T}}A + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

# 132.

*Käänteissäteinen muunnos* (eli *inversiokuvaus*) on kuvaus $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, missä pisteen $P$ kuvaksi asetetaan piste $P'$, joka sijaitsee samalla origosta lähtevällä säteellä kuin $P$ siten, että pisteiden origosta mitattujen etäisyyksien tulo on $= 1$. Muodosta kuvauksen komponenttifunktiot sekä laske Jacobi'n matriisi ja tämän determinantti.

VASTAUS: $f_1(x,y) = x/(x^2+y^2)$, $f_2(x,y) = y/(x^2+y^2)$,
$J_f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} y^2-x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}$, $\quad \det(J_f(x,y)) = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$.

## 133.

Olkoon $\mathbf{r}$ avaruuden $E^3$ paikkavektori, $r$ tämän pituus ja $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}/r$ vastaava yksikkövektori. Osoita:

$$\text{a) } dr = \mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{r}, \qquad \text{b) } r\,d(\mathbf{r}^0) = d\mathbf{r} - (\mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{r})\mathbf{r}^0.$$

VASTAUS:

### 4.2. Ketjusääntö

## 134.

Olkoon annettuna funktiot $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ja $g : G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = (xy,\ x+y,\ xe^y), \quad g(x,y,z) = (y^2 - 2x)\ln z.$$

Laske yhdistetyn funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h = g \circ f$, osittaisderivatta $h_{xy}(1,0)$ ketjusäännön avulla.

VASTAUS:

## 135.

Käyrät $c_1$ ja $c_2$ leikkaavat toisensa pisteessä $P$ kulmassa, jonka suuruus on $\alpha$. Käyrät kuvataan käänteissäteisellä muunnoksella, jolloin saadaan käyrät $d_1$ ja $d_2$; nämä leikkaavat toisensa pisteen $P$ kuvapisteessä $P'$. Osoita, että myös kuvakäyrät leikkaavat toisensa kulmassa $\alpha$.

VASTAUS:

## 136.

Olkoot avaruuden $E^3$ vektorit $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ lineaarisesti riippumattomia. Määritellään reaaliarvoinen funktio $f$ asettamalla

$$f(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \neq 0.$$

Määritä $\nabla f$ ja osoita, että funktion $f$ derivaatta vektorin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ suuntaan on $= 0$.

VASTAUS:

## 137.

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määriteltyä reaaliarvoista funktiota $f$ kutsutaan *p-asteiseksi homogeenifunktioksi*, jos

$$f(\tau x) = \tau^p f(x), \quad \forall\, \tau \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Todista, että jos tällainen funktio on differentioituva, niin sille pätee *Eulerin homogeenifunktiolause*:

$$(\operatorname{grad} f(x))x = p\,f(x).$$

VASTAUS:

### 4.3. Newtonin menetelmä

## 138.

Millainen kaksiulotteinen Newtonin menetelmä saadaan differentiaalin avulla yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x^3y^5 = 1, \\ x^7 + y^7 = 5 \end{cases}$$

ratkaisemiseen? Esitä iteraatiokaava matriisimuodossa.

VASTAUS:

# 139.

Tutki, missä pisteissä Cartesiuksen lehden $x^3 + y^3 = 3xy$ tangentin suuntakulma johonkin koordinaattiakseliin nähden on $45°$. Muodosta tarvittava yhtälöryhmä ja ratkaise se kaksiulotteisella Newtonin iteraatiolla.

VASTAUS: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, $x^2 - y \pm (y^2 - x) = 0$;
$(1.50, 1.50)$, $(1.21, 0.53)$, $(0.53, 1.21)$.

# 140.

Muodosta Newtonin menetelmän mukainen matriisimuotoinen iteraatiokaava yhtälöparille

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 2xy^5, \\ x^6 + x^2 + y^4 = 4. \end{cases}$$

Etsi tämän avulla yksi yhtälöparin kaikkiaan neljästä (reaalisesta) ratkaisusta.

VASTAUS:

# 141.

Etsi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x + \sin^2(xy) + \cos^3 y = 0 \\ y + \sin^3(x^2 + y^2) + \cos^5(x + y) = 0 \end{cases}$$

lähinnä origoa oleva ratkaisu kaksiulotteisella Newtonin iteraatiolla. Valitse lähtöarvoiksi $x_0 = -1$, $y_0 = -0.5$.

VASTAUS:

# 142.

Kokeile edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisemista valitsemalla jokin toinen lähtövektori. Saatko iteraation suppenemaan jotakin muuta juurta kohti?

VASTAUS: