5. Pintateoriaa

5.1. Pintoihin liittyvät peruskäsitteet

143.

Olkoon $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 3xz + 2$. Missä pisteissä pinnan $f(x,y,z) = 0$ normaali on yhdensuuntainen suoran $x = y = z$ kanssa? Laske funktion f suunnattu derivaatta origon suuntaan näissä pisteissä.

VASTAUS:

144.

Määritä pinnan $\mathbf{r}(u,v) = u(1+v)\mathbf{i} + u^2(1-v)\mathbf{j} + u^3v\mathbf{k}$ pisteeseen $(1,1,0)$ asetetun tangenttitason yhtälö. Piirrä pinta.

VASTAUS: $2x - y - 3z = 1$.

145.

Määritä pinnan $\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + v\cos u\,\mathbf{j} + \cos u\cos v\,\mathbf{k}$ pisteeseen $(0,0,1)$ asetetun tangenttitason yhtälö. Piirrä pinta.

VASTAUS: $z = 1$.

146.

Määritä se pinnan $\mathbf{r}(u,v) = (u+v)\mathbf{i} + (u^2+v^2)\mathbf{j} + (u^3+v^3)\mathbf{k}$ piste, jossa tangenttitaso on tason $9x + 3y - z = 0$ suuntainen. Mikä on tangenttitason yhtälö?

VASTAUS: $(2,10,26)$, $9x + 3y - z = 22$.

147.

Tutki, millaista pintaa esittää yhtälö

$$\mathbf{r}(u,v) = (R + r\cos u)\cos v\,\mathbf{i} + (R + r\cos u)\sin v\,\mathbf{j} + r\sin u\,\mathbf{k}, \quad u,v \in [0,2\pi],$$

tarkastelemalla käyriä $u =$ vakio, $v =$ vakio. Laske parametriarvoja $u = \frac{\pi}{4}$, $v = \frac{\pi}{3}$ vastaava pinnan piste ja tähän asetettu normaalivektori. Oletetaan $R > r > 0$. Piirrä pinta.

VASTAUS:

148.

Olkoon $R > r > 0$. Määritä suorakulmaiset koordinaatit niille pinnan

$$\begin{cases} x = (R + r\cos v)\cos u \\ y = (R + r\cos v)\sin u \\ z = r\sin v \end{cases}$$

pisteille, joihin asetettu tangenttitaso on jonkin koordinaattitason suuntainen.

VASTAUS: $(\pm(R \pm r), 0, 0)$ (neljä pistettä), $(0, \pm(R \pm r), 0)$ (neljä pistettä), $(R\cos u, R\sin u, \pm r)$, $u \in [0, 2\pi[$ (kaksi ympyrää).

149.

Funktio $f : [-1,1] \times [0,\pi] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(u,v) = ((4 - u\sin v)\cos 2v,\ (4 - u\sin v)\sin 2v,\ u\cos v),$$

määrittää erään pinnan, ns. Möbiuksen nauhan. Laske pinnan normaalivektori, ja tutki, miten sen ja xy-tason välinen kulma muuttuu, kun nauhaa pitkin kierretään ympäri. Piirrä pinta.

VASTAUS:

150.

Määritä pisteen a) $(2,3,6)$, b) $(3,3,1)$ kautta kulkeva pinnan $z = xy$ normaali.

VASTAUS:

151.

Tutki pinnan $z = \dfrac{a^3}{xy}$ (missä $a > 0$) pisteeseen asetetun tangenttitason ja koordinaattitasojen määräämän tetraedrin tilavuutta.

VASTAUS:

152.

Muodosta tangenttitason yhtälö pinnalle $f(y,z) + g(z,x) + h(x,y) = 0$, kun sivuamispiste on (x_0, y_0, z_0). Funktiot oletetaan differentioituviksi.

VASTAUS:

153.

Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivoituva. Määritä pinnan $x - 2y + 3z + f(x - y + 2z) = 0$ kaikkien tangenttitasojen suuntainen vektori.

VASTAUS:

154.

Olkoot d_x, d_y ja d_z niiden pisteiden etäisyydet origosta, joissa pinnan $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ tangenttitaso leikkaa koordinaattiakselit. Laske $d_x + d_y + d_z$.

VASTAUS:

155.

Määritä käyrän

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 = 2 \end{cases}$$

pisteeseen $(1,1,1)$ asetetun normaalitason yhtälö.

VASTAUS:

156.

Pinnat $y^2 + z^2 = 1$ ja $\frac{1}{4}x^2 + y^2 - z^2 = 1$ leikkaavat toisensa pitkin erästä käyrää. Tutki, missä pisteissä käyrän tangenttivektori on vaakasuora. Millainen käyrä on kysymyksessä?

VASTAUS:

157.

Pinnat $y^2 + z^2 = 1$ ja $\frac{1}{4}x^2 + y^2 - z^2 = 1$ leikkaavat toisensa pitkin erästä käyrää. Laske käyrän tangenttivektori pisteessä, jonka x-koordinaatti on $= 1$ ja muut koordinaatit positiivisia.

VASTAUS: $-14\sqrt{2}\,\mathbf{i}+\sqrt{7}\,\mathbf{j}-7\,\mathbf{k}$.

5.2. Pinnan metriikka

158.

Osoita, että pyörähdyspinnan $\mathbf{r}(u,v)=u\cos v\,\mathbf{i}+u\sin v\,\mathbf{j}+u^2\,\mathbf{k}$ Gaussin kaarevuus on

$$K=\frac{4}{(1+4u^2)^2}.$$

Millainen pinta on kysymyksessä?

VASTAUS:

5.3. Verhokäyristä ja -pinnoista

159.

Etsi mahdollinen verhokäyrä seuraaville käyräparville (parviparametrina t):

$$\text{a) } y=(x-t)^2,\quad \text{b) } y^3=(x-t)^2,\quad \text{c) } y^2=(x-t)^3,\quad \text{d) } y=(x-t)^3.$$

Ilmoita, milloin kyseessä todella on verhokäyrä. Piirrä kuviot.

VASTAUS:

160.

Suoran kulman kärki liukuu pitkin y-akselia siten, että toinen kylki kulkee pisteen $(1,0)$ kautta. Määritä toisen kyljen verhokäyrä ja piirrä se.

VASTAUS:

161.

Etsi paraabeliparven $tx^2-t^2y-1=0$ (parviparametri $t>0$) verhokäyrä. Piirrä kuvio paraabeleista ja verhokäyrästä.

VASTAUS:

162.

Osoita, että vakiopituisella janalla, jonka toinen päätepiste liukuu x-akselilla ja toinen y-akselilla, on verhokäyränä asteroidi.

VASTAUS:

163.

Osoita, että suoraa pitkin vierivän ympyrän halkaisijan verhokäyrä on sykloidi.

VASTAUS:

164.

Etsi evoluutta seuraaville käyrille:

a) $y^2=2px$; b) $x=a\cos u,\ y=b\sin u$ (parametrina u);
c) $\mathbf{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\mathbf{i}+(\sin t-t\cos t)\mathbf{j}$.

VASTAUS: