

8. Sovellutuksia

8.1. Pinta-alan ja tilavuuden laskeminen

235.

Laske sen kappaleen tilavuus, jota rajoittavat pinnat $z = xy$, $x = y^2$, $z = 0$, $x = 1$. (Kappale sijaitsee oktantissa $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.)

VASTAUS: $1/6$.

236.

Laske sen kappaleen tilavuus, jota rajoittavat pinnat $z = xye^y$, $z = 0$, $x + y = 1$.

VASTAUS:

237.

Laske sen kappaleen tilavuus, jota rajoittavat pinnat

$$x = 0, x = 2, y = 0, y = 1, z = 0, z = \frac{16}{(x+2)^2(y+1)^2}.$$

VASTAUS:

238.

Laske sen kappaleen massa, jota xy -tason yläpuolella rajoittavat pinnat $z = 0$, $z = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 1$ ja jonka massatiheys on verrannollinen z -koordinaattiin.

VASTAUS:

239.

Laske sen kappaleen massa, jota rajoittavat pinnat $x = 0$, $y = 0$, $z = 4$ ja $z = e^{x+y}$ ja jonka massatiheys on $\rho = 1/z$.

VASTAUS:

8.2. Keskiö ja hitausmomentti

240.

Olkoon $f(x) < g(x)$ välillä $x \in [a, b]$. Kirjoita levyn

$$\{(x, y) \mid f(x) \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b\}$$

keskiön koordinaatit (massakeskipisteen koordinaatit, jos levy oletetaan homogeeniseksi) kaksinkertaisina integraaleina ja sievennä nämä mahdollisimman pitkälle.

VASTAUS:

241.

Ympyränsektorin keskuskulma on 2α . Laske sektorin keskiö.

VASTAUS:

242.

Ympyräalueen neljännekselle $\{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R\}$ on levitetty massa, jonka pintatiheys on $\rho(x,y) = x$. Etsi massakeskipiste.

VASTAUS:

243.

Käyrät $y = x^k$ ja $x = y^k$ ($k > 0, k \neq 1$) rajoittavat tasoalueen ensimmäisessä neljänneksessä. Laske tämän keskiö. Miten keskiö käyttäytyy, kun $k \rightarrow \infty$?

VASTAUS:

244.

Olkoon $k > 0$. Määritä tasoalueen

$$G = \left\{ (x,y) \mid x^4 < y < \frac{kx^2 + 1}{k+1} \right\}$$

keskiö ja tutki, millä parametrin k arvoilla se ei kuulu alueeseen G .

VASTAUS:

245.

Etsi suorakulmion $[0, a] \times [0, b]$ massakeskipiste, kun massan pintatiheys on $\rho(x,y) = y$.

VASTAUS:

246.

Määritä sen tasokuvion keskiö, jota rajoittavat x-akseli ja sykloidin kaari

$$\mathbf{r}(t) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

VASTAUS:

247.

Laske ellipsialueen neljänneksen (rajoina pääakselit) keskiö.

VASTAUS:

248.

Laske suorakulmion hitausmomentti keskipisteen suhteen.

VASTAUS:

249.

Määritä paraabelien $y^2 = x + 1$ ja $4y^2 = x + 4$ reunustaman äärellisen tasokuvion keskiö sekä hitausmomentit koordinaattiakselien ja origon suhteen.

VASTAUS:

250.

Neljännesympyrän $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ muotoisella levyllä on massatiheys $\rho(x,y) = x$. Laske levyn massakeskipiste.

VASTAUS:

251.

Laske Guldinin säännöllä keskiö ympyrärenkaan puolikkaalle:

$$\{(x,y) \mid b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}.$$

VASTAUS:

252.

Kirjoita kaavat pyörähdyksestä x-akselin ympäri muodostuneen kappaleen keskiön koordinaateille yhden muuttujan integraalina. Laske erityisesti pyörähdyskartion keskiö.

VASTAUS:

253.

Ympyrän $y^2 + z^2 = R^2$, $x = a$ jokaisesta pisteestä asetetaan normaali z-akselille. Nämä muodostavat pinnan, jota kutsutaan *konoidiksi*. Laske konoidin ja em. ympyrän tason rajoittaman kappaleen tilavuus ja keskiö.

VASTAUS:

254.

Pyramidissa, jota reunustavat tasot $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$, on massatiheys $\rho(x,y,z) = z$. Laske massakeskipiste. Oletetaan $a > 0$.

VASTAUS:

255.

Kolmion sivun pituus on b ja vastaava korkeus h . Laske kolmion hitausmomentti sivun suhteen.

VASTAUS:

256.

Laske ellipsin muotoisen homogeenisen levyn hitausmomentti keskipisteen kautta kulkevan levyä vastaan kohtisuoran akselin suhteen.

VASTAUS:

257.

Homogeenisen suorakulmaisen särmiön sivujen pituudet ovat a , b ja c sekä kokonaismassa m . Laske hitausmomentti ja hitaussäde särmän suhteen.

VASTAUS:

258.

Homogeenisen prisman kokonaismassa on m . Sen kohtisuora poikkileikkaus on tasakylkinen suorakulmainen kolmio, jonka kateetin pituus on a . Prisman korkeus on c . Laske prisman hitausmomentit sivusärmien (pituudeltaan c) suhteen.

VASTAUS:

259.

Homogeenisen tetraedrin kokonaismassa on m ja sitä rajoittavat koordinaattitasot ja taso $x/a + y/b + z/c = 1$, missä $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Laske kappaleen hitausmomentti ja hitaussäde z -akselin suhteen.

VASTAUS:

260.

Lieriön muotoista kappaletta rajoittavat pinnat $y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$ ja $x = 1$. Kappaleen tiheys on $\rho(x, y, z) = 1 + x^2$. Laske kokonaismassa, massakeskipiste ja hitausmomentti symmetria-akselin suhteen.

VASTAUS:

261.

Etsi homogeenisen pallon oktantin keskiö.

VASTAUS:

262.

Etsi puolipallon massakeskipiste, kun tiheys on suoraan verrannollinen etäisyyteen keskipisteestä.

VASTAUS:

263.

Määritä R -säteisen puolipallon massakeskipiste, kun tiheys pallokoordinaateissa on

$$\rho(r, \varphi, \vartheta) = \frac{k}{r+R} \quad (k \text{ vakio}).$$

VASTAUS:

264.

Pallon kokonaismassa on m , säde R ja tiheys suoraan verrannollinen keskipisteestä laskettuun etäisyyteen (verrannollisuuskertoimenä α): $\rho = \alpha r$. Laske pallon hitausmomentti J keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen. Laske myös hitaussäde r_0 , so. esitä hitausmomentti muodossa $J = mr_0^2$.

VASTAUS: $J = \frac{4}{9}mR^2$, $r_0 = \frac{2}{3}R$.

265.

Laske homogeenisen suoran ympyrälieriön (korkeus $= h$, pohjan säde $= r$) hitausmomentti a) lieriön akselin, b) pohjan halkaisijan suhteen. Lausu tulos lieriön kokonaismassan $m = \pi r^2 h$ avulla. (Massa = tilavuus, koska homogeenisen kappaleen massatiheydeksi voidaan ottaa 1.)

VASTAUS:

266.

Laske homogeenisen suoran pyörähdydiskartion (korkeus h , pohjan säde r) toinen momentti akselin kautta kulkevan tason suhteen ja pohjataso suhteen. Laske näiden avulla kappaleen hitausmomentit akselin ja pohjan halkaisijan suhteen. Lausu nämä kappaleen kokonaismassan avulla.

VASTAUS:

267.

Laske homogeenisen pyörähdyssellipsoidin hitausmomentti pyörähdysakselin suhteen. Lausu tulos kappaleen kokonaismassan avulla.

VASTAUS:

268.

Kappale sijaitsee xy -tason yläpuolella; sitä rajoittaa ylhäältä pyörähdyssparaboloidi $z = 2 - x^2 - y^2$ ja alhaalta pyörähdysskartio $z^2 = x^2 + y^2$. Laske lieriökoordinaattien avulla kappaleen tilavuus, keskiö ja hitausmomentti z -akselin suhteen.

VASTAUS:

269.

Laske homogeenisen R -säteisen pallon hitausmomentti suoraan integroimalla a) halkaisijan, b) palloa sivuavan suoran suhteen. Lausu tulokset pallon kokonaismassan avulla.

VASTAUS:

270.

Todista Guldinin ensimmäinen sääntö: Jos tasokuvio pyörähtää samassa tasossa olevan akselin ympäri, joka ei leikkaa kuviota, niin syntyvän pyörähdysskappaleen tilavuus on kuvion pinta-ala kerrottuna kuvion keskiön kulkemalla matkalla.

VASTAUS: