9. Epäoleelliset integraalit; integraalin derivointi parametrin suhteen

9.1. Epäoleelliset taso- ja avaruusintegraalit

271.

Olkoon $A = \{\,(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\,\}$. Osoita hajaantuminen tai laske arvo epäoleelliselle tasointegraalille

$$\iint_A (x+y)e^{-x-y}\,dxdy.$$

VASTAUS:

272.

Olkoon $a > 0$, $b > 0$, $A = \{\,(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\,\}$. Laske epäoleellinen integraali

$$\int_A e^{-(ax+by)^2}\,da$$

sijoituksella $u = ax+by,\ v = y/x$.

VASTAUS:

273.

Tutki, onko seuraava epäoleellinen integraali olemassa:

$$\iint_A \frac{1}{x-y}\,dxdy, \quad A = \{\,(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\,\}.$$

VASTAUS: Ei.

274.

Olkoon $A = \{\,(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\,\}$. Laske arvo tai osoita hajaantuminen tasointegraaleille

$$\text{a)} \int_A \ln\frac{1}{r}\,da, \quad \text{b)} \int_A \frac{xy^2}{r^4}\,da; \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

VASTAUS:

275.

Millä kokonaislukuarvoilla p avaruusintegraali

$$\int_B \frac{x}{r^p}\,dv$$

suppenee, kun B on yksikköpallo $\{\,(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\,\}$? Tässä on $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

VASTAUS: $p < 4$.

276.

Laske epäoleelliset integraalit

$$\text{a)} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx, \qquad \text{b)} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy, \qquad \text{c)} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz.$$

VASTAUS:

277.

Laske arvo tai osoita hajaantuminen tasointegraalille

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}.$$

VASTAUS:

278.

Laske arvo tai osoita hajaantuminen avaruusintegraalille

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{dxdydz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}.$$

VASTAUS:

279.

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ koko tasossa jatkuva ja rajoitettu funktio. Olkoon olemassa vakiot a, c ja $\alpha > 2$ siten, että

$$r > a \implies 0 \leq f(x,y) \leq \frac{c}{r^\alpha},$$

missä $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Osoita, että epäoleellinen integraali $\int\limits_{\mathbb{R}^2} f$ suppenee.

VASTAUS:

280.

Olkoon funktio $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jatkuva ja rajoitettu mitallisessa joukossa A paitsi pisteessä $(x_0,y_0) \in A$. Olkoon edelleen olemassa vakiot c ja $\alpha < 2$ siten, että

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{c}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\alpha/2}}$$

muualla paitsi pisteessä (x_0,y_0). Osoita, että epäoleellinen integraali $\int_A f$ suppenee.

VASTAUS:

9.2. Integraalin derivointi parametrin suhteen

281.

Muodosta seuraavat derivaatat laskematta integraalia ensin:

$$\text{a)}\ \frac{d}{dx}\int_1^x t\,dt, \qquad \text{b)}\ \frac{d}{dx}\int_0^{2x} \frac{\sin t}{t}\,dt, \qquad \text{c)}\ \frac{d}{dx}\int_2^{e^x} \frac{\ln t}{t}\,dt.$$

Tarkista tulos integroimalla ensin ja sen jälkeen derivoimalla, mikäli mahdollista.

VASTAUS:

282.

Muodosta

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 \ln(1+tx)\,dt$$

a) derivoimalla integraalimerkin alla, b) integroimalla ensin.

VASTAUS:

283.

Olkoon

$$f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Laske $f'(x)$ välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$. Esitä funktiolle f yksinkertaisempi lauseke tällä välillä laskematta eo. integraalia. Onko funktio koko reaaliakselilla jaksollinen? Piirrä funktion kuvaaja.

VASTAUS: $f'(x) = |\cos x|\cos x + |\sin x|\sin x$;
$f(x) = x - \frac{\pi}{4}$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$,
$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin 2x$, $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$,
$f(x) = \frac{5\pi}{4} - x$, $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$,
$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$,
jatketaan 2π-jaksoisesti.

284.

Funktio f määritellään asettamalla

$$f(t) = \int_1^{1/t} \frac{\sin tx}{x}\,dx, \quad t > 0.$$

Laske $f'(t)$.

VASTAUS:

285.

Olkoon $x > -1$. Laske integraali

$$f(x) = \int_0^1 t^x\,dt$$

ja derivoi saatu yhtälö puolittain muuttujan x suhteen n kertaa.

VASTAUS:

286.

Millä muuttujan t arvolla funktio

$$f(t) = \int_t^{2t} e^{-x^2}\,dx$$

saa suurimman arvonsa?

VASTAUS:

287.

Yhtälö

$$\int_0^y e^t\,dt + \int_0^x \sin t\,dt = 0$$

määrittelee funktion $y(x)$. Lausu implisiittistä derivointia käyttäen integraaleja laskematta $y'(x)$ muuttujien x ja y avulla.

VASTAUS:

288.

Laske $f'(x)$, kun

$$\text{a) } f(x) = \int_0^x e^{xt^2}\,dt, \qquad \text{b) } f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{1/x} \cos(xt^2)\,dt \quad (x > 0).$$

VASTAUS:

289.

Olkoon

$$F(s) = \int_0^2 \frac{1}{s^2 + x^2}\,dx, \qquad s > 0.$$

Laske integraali. Totea, että integraalimerkin alla derivoimisen edellytykset ovat voimassa ja laske derivaatta $F'(s)$ sekä integraalimerkin alla derivoimalla että suoraan laskemastasi lausekkeesta. Miten tulosta voidaan käyttää integraalin

$$\int_0^2 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

laskemiseen?

VASTAUS:

290.

Funktion

$$F(s) = \int_0^\infty f(s,t)\,dt, \quad \text{missä } f(s,t) = s^3 e^{-s^2 t},$$

derivaattaa $F'(0)$ ei voida laskea derivoimalla integraalimerkin alla. Totea, että asiaa koskevan lauseen oletukset eivät ole voimassa: ei ole olemassa sellaista funktiota $g(t)$, että

$$|f_s(s,t)| \le g(t) \quad \forall s \in [-1,1] \qquad \text{ja} \quad \int_0^\infty g(t)\,dt < \infty.$$

VASTAUS:

291.

Määritä funktion

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt, \quad s > 0,$$

kaikkien kertalukujen derivaatat derivoimalla integraalimerkin alla. Miksi derivointi on sallittua? Johda derivaattojen avulla tulos

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

VASTAUS: $F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt$, $s > 0$.

292.

Gammafunktio määritellään integraalilla

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt, \quad x > 0.$$

Mitä edellinen tehtävä kertoo gammafunktion arvoista, kun argumenttina on luonnollinen luku? Piirrä gammafunktion kuvaaja. Tarkastele tällöin myös negatiivisia muuttujan arvoja; funktio määritellään näillä arvoilla muulla tavoin kuin em. integraalilla.

VASTAUS: $\Gamma(n+1) = n!$.