

11. Pintaintegraali

11.1. Määrittely ja laskeminen

316.

Laske lieriön $x^2 + y^2 = 1$ satulapinnasta $z = xy$ erottaman osan pinta-ala.

VASTAUS: $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)$.

317.

Laske sen pinnan ala, jonka lieriö $x^2 + y^2 = R^2$ leikkaa a) kartiosta $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, b) elliptisestä paraboloidista $z = 2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

VASTAUS: a) $\sqrt{2}\pi R^2$; b) $\frac{2\pi}{3}[(1 + R^2)^{3/2} - 1]$.

318.

Laske ns. *Viviani'n ikkunan* pinta-ala, so. sen pinnanpalan ala, jonka lieriö $x^2 + y^2 = Rx$ erottaa pallostaa $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

VASTAUS:

319.

Laske paraboloidin $z = x^2 + y^2$ ja kartion $z^2 = x^2 + y^2$ rajoittaman kappaleen kokonaispinta-ala.

VASTAUS: $(\sqrt{2} + \frac{5}{6}\sqrt{5} - \frac{1}{6})\pi$.

320.

Pinnanpala on annettu parametriesityksen avulla: $x = 8u^2$, $y = v^2$, $z = 4uv$, $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 3]$. Laske pinnanpalan ala.

VASTAUS: 136.

321.

Laske pintaintegraali

$$\int_B x^2 dS, \quad B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

VASTAUS: π .

322.

Laske R -säteisen pallon tilavuus ja pinta-ala suorittamalla integroinnit pallokoordinaateissa.

VASTAUS:

11.2. Sovellutuksia

323.

Laske puolipallon pinnan keskiö.

VASTAUS:

324.

Pallopinnan säde on R ja pinnalla on tasainen massajakauma, jonka kokonaismassa on m . Laske pallopinnan hitausmomentti keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen.

VASTAUS:

325.

Laske homogeenisen umpinaisen pallon ja homogeenisen pallokuoren hitausmomentit keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen, kun pallon säde R ja (koko pallon tai kuoren) kokonaismassa m .

VASTAUS:

326.

Kuinka monta prosenttia maapallon pinta-alasta sijaitsee kääntöpiirien välissä? Entä napa-alueilla, so. napapiirien sisäpuolella? Muodosta tarvittavat pintaintegraalit pallokoordinaateissa ja laske ne. Anna vastaus prosenttiyksikön tarkkuudella. (Kääntöpiirien leveysasteet ovat $\pm\epsilon$ ja napapiirien $\pm(90^\circ - \epsilon)$, missä $\epsilon = 23.5^\circ$.)

VASTAUS:

327.

Homogeeninen pallokuori leikataan kahdella yhdensuuntaisella tasolla. Osoita, että tasojen väliin jäävän pallonpintavyöhykkeen keskiö sijaitsee tasojen keskivälillä.

VASTAUS: