12. Derivointioperaattoreista geometrisissa avaruuksissa

12.1. Gradientti, divergenssi ja roottori

328.

Laske $\nabla \cdot \mathbf{u}$, kun $\mathbf{u}$ on vektorikenttä

a) $(z-y)\mathbf{i}+(x-z)\mathbf{j}+(y-x)\mathbf{k}$,
b) $e^{xyz}(\mathbf{i}+x\ln y\,\mathbf{j}+x^2z\,\mathbf{k})$,
c) $(x^3z-2xyz)\mathbf{i}+(xy-3x^2yz)\mathbf{j}+(yz^2-xz)\mathbf{k}$.

VASTAUS: a) 0; b) $e^{xyz}(yz+x^2z\ln y+x/y+x^3yz+x^2)$; c) 0.

329.

Laske $\nabla \times \mathbf{u}$, kun $\mathbf{u}$ on vektorikenttä

a) $2xyz\,\mathbf{i}+x^2z\,\mathbf{j}+x^2y\,\mathbf{k}$,
b) $e^{xyz}(\mathbf{i}+x\ln y\,\mathbf{j}+x^2z\,\mathbf{k})$,
c) $(x^2+y^2+z^2)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$.

VASTAUS: a) $\mathbf{o}$;
b) $e^{xyz}[(x^3z^2-x^2y\ln y)\mathbf{i}+(xy-x^2yz^2-2xz)\mathbf{j}+(xyz\ln y+\ln y-xz)\mathbf{k}$;
c) $\mathbf{o}$.

330.

Laske vektorikentän

$$\mathbf{u}(\mathbf{r})=(yx^2+z)\mathbf{i}+(zy^2+x)\mathbf{j}+(xz^2+y)\mathbf{k}$$

divergenssi ja roottori. Mikä on divergenssin arvo niissä pisteissä, missä roottori on $=\mathbf{o}$?

VASTAUS: $\nabla \cdot u=6$ pisteissä $(1,1,1)$, $(-1,-1,-1)$; $\nabla \cdot u=-2$ pisteissä $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$.

331.

Piirrä kuva vektorikentän $\mathbf{u}(x,y,z)=z^2(x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j})+\mathbf{k}$ ja xz-tason leikkauksesta. Millaisia symmetriaominaisuuksia kentällä on?

VASTAUS:

332.

Laske vektorikentän $\mathbf{u}(x,y,z)=z^2(x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j})+\mathbf{k}$ vuo kuution $|x|\le\frac{1}{2}$, $|y|\le\frac{1}{2}$, $|z|\le\frac{1}{2}$ pinnan läpi. Laske myös kentän divergenssi ja roottori.

VASTAUS: $\frac{1}{6}$; $\nabla\cdot\mathbf{u}=2z^2$, $\nabla\times\mathbf{u}=2z(x\mathbf{j}-y\mathbf{i})$.

333.

Piirrä samaan kuvaan funktion

$$u(x,y)=xe^{-x^2-y^2}$$

tasa-arvokäyrät ja tämän gradientin $\nabla u(x,y)$ kenttävektorit. Miten tasa-arvokäyrät ja kenttävektorit suhtautuvat toisiinsa?

VASTAUS:

334.

Vektorikenttä $\mathbf{u}$ on riippumaton z-koordinaatista ja sen z-komponentti on $=0$. xy-tasossa olevat kenttävektorit ovat origokeskisten ympyröiden (positiiviseen kiertosuuntaan osoittavia) tangenttivektoreita, joiden pituus riippuu ympyrän säteestä. Määritä kenttä, kun tiedetään, että $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{o}$. Piirrä kuva kentästä.

VASTAUS:

12.2. Laskusääntöjä

335.

Osoita: a) $\nabla \cdot \mathbf{r}^0 = \frac{2}{r}$, b) $\nabla \times \mathbf{r}^0 = \mathbf{o}$.

VASTAUS:

336.

Sievennä $\nabla \cdot (r^p \mathbf{r})$. Millä luvun p arvoilla tulos on vakio?

VASTAUS: $(p+3)r^p$; $p=0$ tai $p=-3$.

337.

Sievennä $\mathbf{r} \cdot \nabla[\nabla \cdot (r^p \mathbf{r})]$.

VASTAUS: $p(p+3)r^p$.

338.

Olkoon $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ vektorikenttä. Saata yksinkertaisimpaan muotoonsa a) $(\mathbf{u} \times \nabla) \cdot \mathbf{r}$, b) $(\mathbf{u} \times \nabla) \times \mathbf{r}$.

VASTAUS: a) 0; b) $-2\mathbf{u}$.

339.

Olkoon $\mathbf{e}$ vakioyksikkövektori ja $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ vektorikenttä. Osoita:

$$\mathbf{e} \cdot [\nabla(\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}) + \nabla \times (\mathbf{e} \times \mathbf{u})] = \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

VASTAUS:

340.

Olkoot

$$f(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \quad \text{ja} \quad g(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}$$

geometrisen avaruuden E^3 skalaarikenttiä. Laske ∇f ja ∇g. Vektorit $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ovat vakioita.

VASTAUS:

341.

Olkoot **a** ja **b** vakiovektoreita. Laske skalaarikolmitulon $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{r}]$ gradientti.

VASTAUS: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

342.

Olkoot **a** ja **b** vakiovektoreita. Osoita:

$$\nabla[(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{b})] = \mathbf{b}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{a})+\mathbf{a}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{b}).$$

VASTAUS:

343.

Olkoon **c** vakiovektori. Osoita vektoreita komponenteittain kirjoittamatta, että

$$\nabla\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}}{r^3} = \nabla\times\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{c}}{r^3}.$$

VASTAUS:

344.

Olkoon **c** vakiovektori. Sievennä $\nabla\times(r^2\mathbf{c}\times\mathbf{r})$.

VASTAUS: $4r^2\mathbf{c}-2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{c})\mathbf{r}$.

345.

Olkoon **c** vakiovektori ja $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivoituva funktio. Määritä skalaarikenttien F ja G lausekkeet kehitelmässä

$$\nabla\times(\mathbf{r}\times h(r)\mathbf{c}) = F(\mathbf{r})\mathbf{r}-G(\mathbf{r})\mathbf{c}.$$

VASTAUS: $F(\mathbf{r}) = h'(r)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{c})/r, \quad G(\mathbf{r}) = rh'(r)+2h(r).$

346.

Lausu funktion F derivaattojen ja paikkavektorin pituuden r avulla $\mathbf{r}\cdot\nabla(\nabla^2F(r))$.

VASTAUS: $rF'''(r)+2F''(r)-2F'(r)/r$.

347.

Tutki, millä vakion p arvolla yhtälön

$$\nabla^2[r^2F(r)] = r^2\nabla^2F(r)+p\,\mathbf{r}\cdot\nabla F(r)$$

ainoa ratkaisu on identtisesti häviävä funktio $F(r)=0$.

VASTAUS: $p=4$.

348.

Olkoon $F(r)$ avaruuden E^3 skalaarikenttä, joka toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\nabla^2[(\mathbf{r}\cdot\nabla r)F(r)] = 0.$$

Muodosta funktiota F koskeva tavallinen differentiaaliyhtälö ja tutki, millainen skalaarikenttä $F(r)$ voi olla.

VASTAUS: $F(r) = C_1/r + C_2/r^2$.

349.

Ratkaise Laplacen differentiaaliyhtälö $\nabla^2 u = 0$ kolmiulotteisessa avaruudessa, kun tiedetään, että u on pallosymmetrinen, ts. $u(x,y,z) = F(r)$. Mikä on yhtälön ratkaisu kaksiulotteisessa tasossa, kun $u(x,y) = F(r)$?

VASTAUS: Avaruus: $F(r) = -C_1/r + C_2$;   taso: $F(r) = C_1 \ln r + C_2$.

12.3. Käyräviivaiset koordinaatistot

350.

Yhtälöt

$$\begin{cases} x = uv\cos w, \\ y = uv\sin w, \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases}$$

määrittävät käyräviivaiset koordinaatit u, v, w, ns. *parabolisen koordinaatiston*. Määritä koordinaatiston yksikkövektorit. Ovatko ne ortogonaalisia? Millaisia ovat koordinaattipinnat? Laske suure H.

VASTAUS:

351.

Pisteen suorakulmaiset koordinaatit ovat $(3, 3\sqrt{3}, -5/2)$. Laske pisteen paraboliset koordinaatit ja lausu siihen liittyvät paraboliset yksikkövektorit $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$-kannassa.

VASTAUS: $u = 2,\ v = 3,\ w = \overline{\text{arc}}\tan\sqrt{3}$;
$\mathbf{e}_u = \frac{1}{2\sqrt{13}}(3\mathbf{i} + 3\sqrt{3}\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$, $\mathbf{e}_v = \frac{1}{\sqrt{13}}(\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$, $\mathbf{e}_w = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

352.

Lausu Laplacen operaattori $\Delta = \nabla^2$ parabolisten koordinaatten avulla.

VASTAUS:

353.

Bipolaariset tasokoordinaatit $u,\ v$ määritellään yhtälöillä

$$x = \frac{\sinh v}{\cosh v - \cos u}, \quad y = \frac{\sin u}{\cosh v - \cos u}.$$

Tutki, minkälaiset ovat koordinaattikäyrät ja annettuun pisteeseen liittyvät bipolaariset yksikkövektorit. Ovatko koordinaatit suorakulmaisia?

VASTAUS: Ympyränkaaria:
$(x\sinh v - \cosh v)^2 + (y\sinh v)^2 = 1$, $(x\sin u)^2 + (y\sin u - \cos u)^2 = 1$;
$\mathbf{e}_u = (-\sin u\sinh v\,\mathbf{i} + (\cos u\cosh v - 1)\,\mathbf{j})/(\cosh v - \cos u)$,
$\mathbf{e}_v = ((1 - \cos u\cosh v)\,\mathbf{i} - \sin u\sinh v\,\mathbf{j})/(\cosh v - \cos u)$;
ovat suorakulmaisia.

12.4. Lieriö- ja pallokoordinaatisto

354.

Osoita, että lieriökoordinaateille pätee

$$\text{a) } \nabla\rho = \mathbf{e}_\rho, \qquad \text{b) } \nabla\varphi = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_\varphi, \qquad \text{c) } \nabla z = \mathbf{e}_z.$$

VASTAUS:

355.

Osoita, että pallokoordinaateille pätee

$$\text{a) } \nabla r = \mathbf{e}_r, \qquad \text{b) } \nabla\theta = \frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta, \qquad \text{c) } \nabla\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\varphi.$$

VASTAUS:

356.

Totea oikeaksi seuraavat lieriökoordinaatteja koskevat kaavat:

$$\text{a) } \nabla\varphi + \nabla\times(\ln\rho\nabla z) = \mathbf{o}, \qquad \text{b) } \nabla\ln\rho - \nabla\times(\varphi\,\nabla z) = \mathbf{o}.$$

VASTAUS:

357.

Totea oikeaksi seuraavat pallokoordinaatteja koskevat kaavat:

$$\text{a) } \nabla\times(\cos\theta\,\nabla\varphi) = \nabla\frac{1}{r}, \qquad \text{b) } \nabla\times\frac{r\,\nabla\theta}{\sin\theta} = \nabla\varphi.$$

VASTAUS:

358.

Osoita, että lieriökoordinaattien yksikkövektoreiden osittaisderivaatat itse koordinaattien suhteen ovat $= \mathbf{o}$ paitsi

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial\varphi} = \mathbf{e}_\varphi, \qquad \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\mathbf{e}_\rho.$$

VASTAUS:

359.

Laske pallokoordinaattien yksikkövektoreiden osittaisderivaatat itse koordinaattien suhteen ja esitä tulokset yksikkövektoreiden muodostamassa kannassa.

VASTAUS:

360.

z-akselin ympäri kiertävän kentän vektorit ovat lieriökoordinaattien yksikkövektoreiden $\mathbf{e}_\varphi$ suuntaiset ja niiden itseisarvo on suoraan verrannollinen z-akselista lasketun etäisyyden neliöön. Laske kentän divergenssi ja roottori. Mitä nämä kertovat kentästä?

VASTAUS: $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, $\nabla \times \mathbf{u} = 3\alpha\rho\mathbf{e}_z$, missä α on verrannollisuuskerroin.

361.

Virtauskentän kenttävektorit muodostuvat pallokoordinaattien yksikkövektoreista $\mathbf{e}_\theta$. Laske kentän divergenssi ja roottori. Kuvaile, millaisesta virtauksesta on kysymys. Missä sijaitsevat virtauksen lähteet?

VASTAUS: $\nabla \cdot \mathbf{u} = 1/(r \tan \vartheta)$, $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{e}_\varphi / r$.

362.

Laske pallokoordinaateissa ∇r, $\nabla \vartheta$ ja $\nabla \varphi$. Tulkitse saamasi tulos: Minkä suuntaisia gradienttivektorit ovat? Osoita, että $\nabla \times (\cos \vartheta \nabla \varphi) = \nabla \dfrac{1}{r}$.

VASTAUS:

363.

Osoita, että kaavat

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi, \\ x_2 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \varphi, \\ x_3 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ x_4 = r \cos \theta_1, \end{cases}$$

missä $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 \leq \pi$, $0 \leq \theta_2 \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ määrittelevät neliulotteiset pallokoordinaatit. Miten on määriteltävä n-ulotteiset pallokoordinaatit?

VASTAUS: